

# Versuch 11

## Messung großer Widerstände

---

Praktikant:           Joscha Knolle  
                              Ole Schumann  
E-Mail:                joscha@htilde.de  
Durchgeführt am:   10.09.2012  
Abgabe:               11.09.2012

Testiert:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>2</b>
2.1. Widerstandsmessung über Entladung eines Kondensators . . . . .	2
2.2. Widerstandsbestimmung aus Schwingkreisen . . . . .	3
2.2.1. Bestimmung des Eingangswiderstandes eines Oszilloskops .	3
<b>3. Materialien &amp; Methoden</b>	<b>4</b>
3.1. Analoger Stromintegrator . . . . .	4
3.2. Kapazität eines Plattenkondensators . . . . .	5
3.3. Versuchsaufbau . . . . .	5
<b>4. Durchführung</b>	<b>6</b>
4.1. Eichung . . . . .	6
4.2. Entladung des Kondensators . . . . .	6
4.3. Schwingkreise (RC und RLC) . . . . .	6
<b>5. Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1. Eichkonstante $\kappa$ . . . . .	7
5.2. Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0$ . . . . .	8
5.3. Isolationswiderstand $R_{\text{iso}}$ und unbekannter Widerstand $R_x$ . . . . .	8
5.4. Skizzen der Spannungsverläufe . . . . .	9
5.5. Kapazität $C_{\text{Pl}}$ und Eingangswiderstand $R_{\text{Osz}}$ . . . . .	10
5.6. Unbekannter Widerstand $R_x$ . . . . .	11
5.7. Induktivität $L$ und Widerstand $R_L$ der Drossel- und Luftspule . .	12
5.8. Induktivität der Luftspule . . . . .	13
5.9. Kapazität $C_{\text{com}}$ des kommerziellen Kondensators . . . . .	13
<b>6. Diskussion</b>	<b>14</b>
<b>A. Formelsammlung</b>	<b>I</b>
<b>B. Literaturverzeichnis</b>	<b>II</b>

## 1. Einleitung

Um Widerstände zu messen, wird sehr häufig das OHMSche Gesetz  $U = R \cdot I$  oder die WHEATSTONEsche Brückenschaltung (zum Beispiel in Versuch 9) verwendet. Versucht man allerdings, sehr große Widerstände zu messen, so schlagen diese Methoden fehl, da große Spannungen, kleine Stromstärken und die hohen Innenwiderstände der Messgeräte die Messwerte stark verfälschen.

In diesem Versuch soll daher die Messung von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten durch Auf- und Entladevorgänge bei Kondensatoren sowie durch elektrische Schwingkreise untersucht werden.

## 2. Theorie

### 2.1. Widerstandsmessung über Entladung eines Kondensators

Um große Widerstände zu messen, können Auf- und Entladevorgänge von Kondensatoren betrachtet werden. Diese Vorgänge gehorchen einer Differentialgleichung erster Ordnung und können daher mit einem Exponentialansatz beschrieben werden. Die auf dem Kondensator gespeicherte Ladung  $Q$  zu einem Zeitpunkt  $t$  lässt sich also beim Entladen durch

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{RC} \cdot t\right) \quad (1)$$

beschreiben. Hier ist  $Q_0$  die Anfangsladung auf dem Kondensator,  $R$  der Widerstand, über den der Kondensator entladen wird, und  $C$  die Kapazität des Kondensators. Bei einem Plattenkondensator ist diese durch

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2)$$

gegeben, wobei  $A$  die Plattenfläche und  $d$  den Abstand zwischen den Platten bezeichnet.

Misst man nun die Ladung zu den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$ , so kann man aus dem Quotienten der Ladungen

$$\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)} = \exp\left(\frac{t_2 - t_1}{RC}\right) \quad (3)$$

den Widerstand  $R$  zu

$$R = \frac{t_2 - t_1}{C \cdot \ln\left(\frac{Q(t_1)}{Q(t_2)}\right)} \quad (4)$$

bestimmen.

## 2.2. Widerstandsbestimmung aus Schwingkreisen

In einem R-L-C-Parallelschwingkreis lässt sich durch Anwenden der Kirchhoff'schen Maschenregel die Differentialgleichung für die Ladung  $Q$  aufstellen:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (5)$$

Diese hat eine analoge Form wie die Differentialgleichung, die in Versuch 1 („Pohl-scher Resonator“) aufgestellt wurde. Analog zu dieser Situation kann man ähnliche Substitutionen einführen:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6)$$

Das logarithmische Dekrement ist nun durch die Gleichung

$$\Lambda = \ln \left( \frac{Q(t)}{Q(t+T)} \right) = \beta \cdot T = \frac{R}{2L}T \quad (7)$$

gegeben (vergleiche Protokoll 1). Durch Umstellen lässt sich dann der Widerstand bestimmen.

### 2.2.1. Bestimmung des Eingangswiderstandes eines Oszilloskops

Betrachtet man einen Schaltkreis aus Oszilloskop und einem bekannten Widerstand  $R_2$ , so ergibt sich der Gesamtwiderstand  $R_g$  zu

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{Oszi}}}. \quad (8)$$

Führt man die Konstanten

$$a = R_{\text{Oszi}} \cdot C \quad (9)$$

$$b = R_g \cdot C = \frac{R_{\text{Oszi}}R_2}{R_{\text{Oszi}} + R_2} \cdot C = a \frac{R_2}{R_{\text{Oszi}} + R_2} \quad (10)$$

ein, so erhält man für den Widerstand des Oszilloskops

$$R_{\text{Oszi}} = \left( \frac{a}{b} - 1 \right) R_2. \quad (11)$$

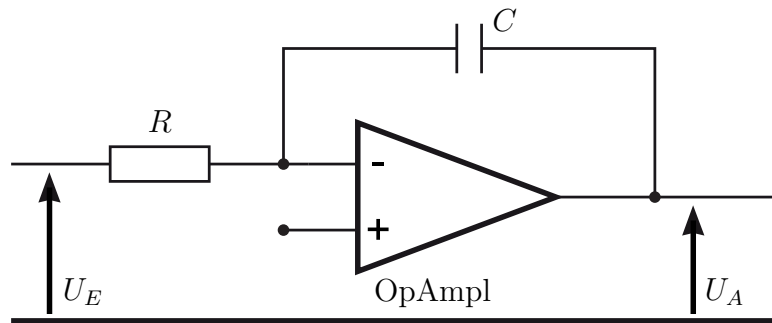


Abbildung 1: Schaltplan eines Stromintegrators [LP]

### 3. Materialien & Methoden

#### 3.1. Analoger Stromintegrator

Die Grundlage des Stromintegrators ist ein Operationsverstärker (OpAmp). Dieser verstärkt die Differenz der Eingangsspannungen um ein Vielfaches. In der hier vorliegenden Schaltvariante findet zusätzliche eine Rückkopplung statt: Wird an einem Eingang eine positive Spannung gegenüber dem anderen Eingang angelegt, so wird die Spannungsdifferenz durch den Operationsverstärker erhöht und durch die Rückkopplung an den anderen Eingang gegeben. Dadurch entsteht eine Spannungsdifferenz mit invertiertem Vorzeichen.

Beim Stromintegrator befindet sich bei der Rückkopplung ein Kondensator, welcher so langsam aufgeladen wird (vergleiche Abbildung 1). Die Aufladung führt nun aber zu einer Erhöhung der Potentialdifferenz an den Eingängen, so dass die Verstärkung und damit auch die Ausgangsspannung weiter ansteigt. So kann also die konstante Eingangsspannung über die Zeit aufaddiert, sprich integriert werden. Mathematisch lässt sich dies mit Hilfe der zweiten Kirchhoff'schen Regel beschreiben:

$$\begin{aligned}
 I_R + I_C &= 0; & I_C &= \dot{Q}_C = C\dot{U}_A; & I_R &= \frac{U_E}{R} \\
 \Rightarrow U_A &= -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t U_E dt & \Leftrightarrow & Q(t) &= -\frac{1}{R} \int_{t_0}^t U_E dt.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nimmt man an, dass  $U_E = \text{const.}$  gilt, so folgt auch  $Q = -1/R \cdot U_E \cdot \Delta t$ . Der Eichkoeffizient  $\kappa$  bezeichnet nun das Verhältnis aus Ladung  $Q$  und angezeigtem Skalenteil (Skt)  $x$ . Es gilt also

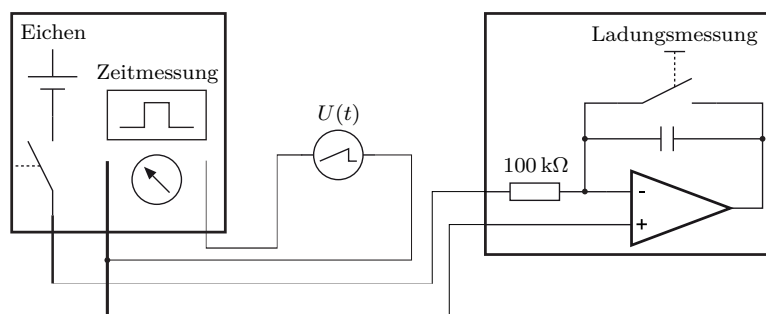
$$\kappa = \frac{Q}{x} = \frac{U_E \cdot \Delta t}{x \cdot R}. \tag{13}$$

### 3.2. Kapazität eines Plattenkondensators

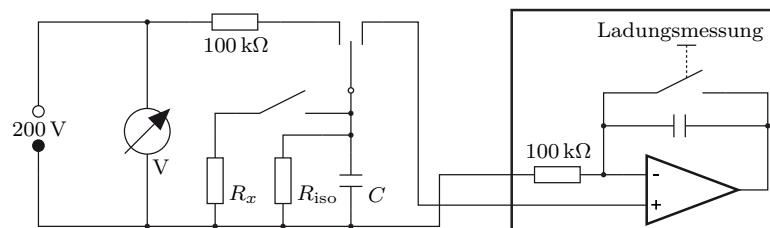
Vernachlässigt man die Randeﬀekte bei einem einfachen Plattenkondensator aus zwei parallelen, gleichgeformten Platten, so findet man, dass sich die Kapazität über  $C = \epsilon_r \epsilon_0 A/d$  darstellen lässt. Für  $n$  kreisförmige Platten mit Radius  $r$  und konstantem Plattenabstand  $d$  ergibt sich die Kapazität nach [KI] zu

$$C_n = (n - 1) \epsilon_r \epsilon_0 \left\{ \frac{\pi r^2}{d} + r \left[ \ln \left( \frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (14)$$

### 3.3. Versuchsaufbau



**Abbildung 2:** Schaltplan des Eichkreises [LP, bearbeitet vom Verfasser]



**Abbildung 3:** Schaltplan des Messkreises [LP, bearbeitet vom Verfasser]

Für den Versuch werden zwei getrennte Schaltkreise aufgebaut. Im ersten Schaltkreis findet die Eichung des Ladungsmessgerätes statt. Der dafür verwendete Schaltplan ist in Abbildung 2 zu finden.

In dem Messkreis werden schließlich alle relevanten Messungen durchgeführt. Der Schaltplan dieses Kreises ist in Abbildung 3 zu sehen.

## 4. Durchführung

### 4.1. Eichung

Zunächst wird der Stromintegrator in den Eichkreis eingebaut. Dann werden für fünf verschiedene Zeiten Spannungspulse generiert, welche dann vom Integrator gemessen werden. Diese Werte werden notiert, um später den Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  zwischen Ladung und Skalenteil zu finden.

### 4.2. Entladung des Kondensators

In einem ersten Schritt wird der Kondensator fünf mal mit 220 V aufgeladen und direkt entladen. Die Ausgangsladung  $Q_0$  wird notiert.

Nun wird parallel zum Plattenkondensator ein unbekannter Widerstand  $R_x$  geschaltet. Der Kondensator wird wieder aufgeladen und nach zehn verschiedenen Zeiten  $t$  entladen und die sich noch auf dem Kondensator befindliche Ladung  $Q(t)$  gemessen.

Als drittes wird der Widerstand  $R_x$  entfernt und nur die Entladung über den Isolationswiderstand  $R_{\text{iso}}$  betrachtet. Hierbei wird der Kondensator fünf mal nach verschiedenen Zeiten entladen.

### 4.3. Schwingkreise (RC und RLC)

Parallel zu einem Impulsgenerator werden nun folgende Bauteile in einen Schwingkreis mit Induktivität  $L$ , Widerstand  $R$  und Kapazität  $C$  geschaltet und der Spannungsverlauf am Kondensator mit einem Oszilloskop betrachtet:

- a) Impulsgenerator allein (zur Kontrolle)
- b) Impulsgenerator mit Plattenkondensator
- c) Plattenkondensator mit  $2\text{ M}\Omega$  Widerstand parallel
- d) Plattenkondensator mit unbekanntem Widerstand  $R_x$  parallel
- e) Plattenkondensator mit Drosselspule parallel
- f) Plattenkondensator mit Luftspule parallel
- g) Kommerzieller Kondensator mit  $2\text{ M}\Omega$  Widerstand parallel

Zusätzlich werden noch einige Materialeigenschaften vermessen: Die Widerstände der Drosselspule, der Luftspule, des  $2\text{ M}\Omega$  Widerstands  $R_2$ , der Widerstand des Plattenkondensators  $R_{C_{PI}}$  und der unbekannte Widerstand  $R_x$  werden mit einem Multimeter ausgemessen.

Anschließend werden mit dem Multimeter noch die Kapazitäten  $C_{PI}$  des Plattenkondensators und die Kapazität  $C_{com}$  des kommerziellen Folienkondensators vermessen.

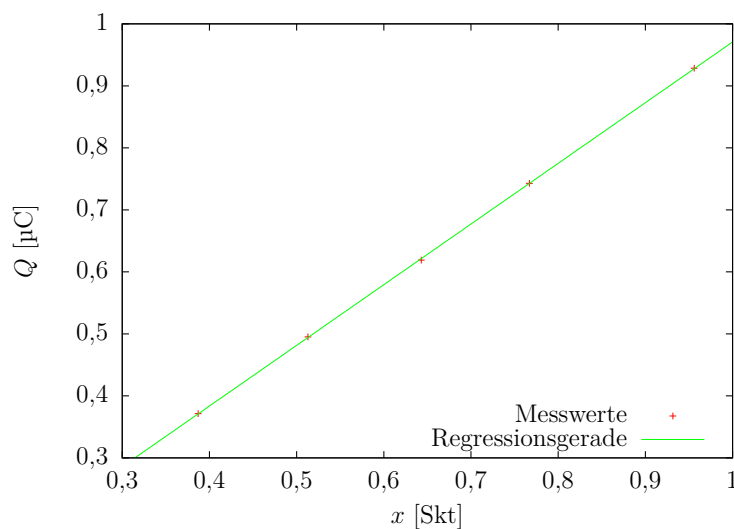
## 5. Auswertung

### 5.1. Eichkonstante $\kappa$

Der vom Stromintegrator angezeigte Wert  $x$  (in Skalenteilen Skt) ist proportional zu der Ladung  $Q$ , die gemessen werden soll. Durch Spannungspulse von  $1,238\text{ V}$  mit der Länge  $\Delta t$  wird über einen Widerstand  $R_v$  am Ladungsmessgerät eine wohldefinierte Ladungsmenge abgegeben, welche vom Stromintegrator durch einen Ausschlag  $x$  gekennzeichnet wird. Über den linearen Zusammenhang

$$Q = \kappa \cdot x \quad (15)$$

kann nun über die Steigung der Regressionsgeraden die Eichkonstante gefunden werden. In Abbildung 4 sind Messwerte und Fit gezeichnet.



**Abbildung 4:** Bestimmung der Eichkonstanten  $\kappa$



Der von `gnuplot` bestimmte Wert für die Steigung liefert uns damit die Eichkonstante zu

$$\kappa = (9,7 \pm 0,4) \times 10^{-7} \text{ C/Skt.} \quad (16)$$

## 5.2. Dielektrizitätskonstante $\varepsilon_0$

Nach Gleichung (14) lässt sich die Dielektrizitätskonstante aus der Kapazität  $C$  des Kondensators bestimmen. Über den Zusammenhang  $Q = C \cdot U$  wird zunächst die Kapazität aus der mittleren Ladung  $\bar{Q}$  und der Spannung berechnet und anschließend über

$$\varepsilon_0 = \frac{C_n}{(n-1)\varepsilon_r \left\{ \frac{\pi r^2}{d} + r \left[ \ln \left( \frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right\}} \quad (17)$$

die gesuchte Konstante bestimmt. Dabei nehmen wir an, dass  $\varepsilon_r \approx 1$  gilt. Mit den Ladungs-Spannungs-Werten aus dem Eichvorgang erhalten wir so

$$\varepsilon_0 = 1,16 \times 10^{-9} \text{ C/(V m)}. \quad (18)$$

Aus den Entladevorgängen des Kondensators erhalten wir hingegen

$$\varepsilon_0 = 9,89 \times 10^{-12} \text{ C/(V m)}. \quad (19)$$

## 5.3. Isolationswiderstand $R_{\text{iso}}$ und unbekannter Widerstand

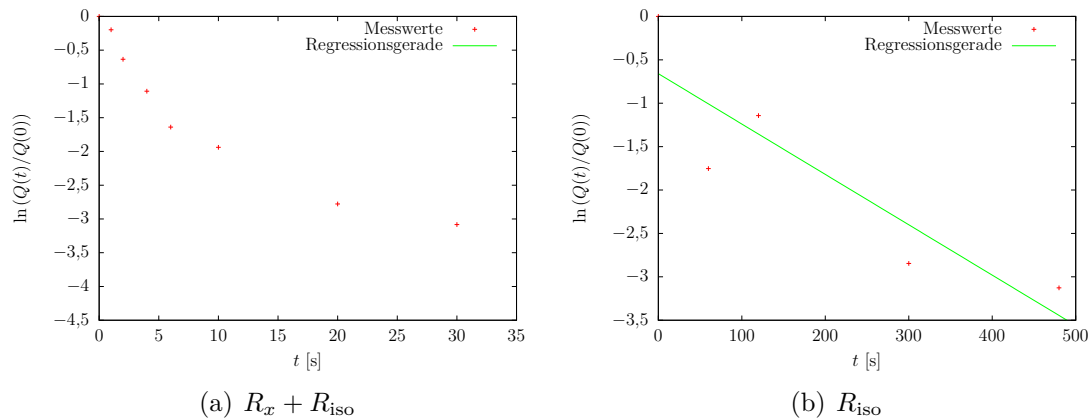
### $R_x$

Nach Gleichung (1) fällt die Ladung auf einem Kondensator mit der Zeit exponentiell ab. In Abbildung 5 ist nun der Logarithmus des Verhältnisses der Ladungen  $Q(t)$  und  $Q(0)$  gegen die Zeit aufgetragen. Dabei ist sowohl die Messreihe mit parallel geschalteten unbekanntem Widerstand  $R_x$ , Abbildung 5(a), als auch die Messreihe ohne diesen Widerstand, Abbildung 5(b), eingezeichnet. Aus den Steigungen  $m_1$  und  $m_2$  der Regressionsgeraden lassen sich nun Isolationswiderstand und der unbekannte Widerstand  $R_x$  bestimmen: Gleichung (1) entnimmt man, dass die Steigung mit dem Faktor  $-1/RC$  identifiziert werden kann. Die Kapazität  $C$  wird hier nach Gleichung (14) berechnet, so dass man schließlich

$$R_{\text{iso}} = -\frac{1}{C \cdot m_1} \quad \text{und} \quad R_{\text{ges}} = -\frac{1}{C \cdot m_2} \quad (20)$$

findet.

Messung b) mit dem Gesamtwiderstand  $R_g$  liefert hier eine Steigung von  $m_2 = (-0,10 \pm 0,02)/\text{s}$ . Um daraus nun den Widerstand errechnen zu können, benötigen



**Abbildung 5:** Bestimmung der Widerstände  $R_x$  und  $R_{iso}$

wir zusätzlich die Kapazität des Plattenkondensators  $C_{P1}$ . Den Wert hierfür haben wir mit einem Multimeter zu  $C_{P1} = 4,08 \text{ nF}$  bestimmt. Damit folgt für den Gesamtwiderstand

$$R_g = (2,4 \pm 0,5) \text{ G}\Omega. \quad (21)$$

Aus der Regression für Messung c) erhält man mit `gnuplot` den Isolationswiderstand  $R_{iso}$  aus der Steigung  $m_1 = (-0,0058 \pm 0,0017)/\text{s}$ :

$$R_{iso} = (42 \pm 13) \text{ G}\Omega. \quad (22)$$

Der Fehler berechnet sich jeweils nach (e) zu

$$\sigma_{R_i} = \sigma_{m_j} \cdot \frac{1}{C \cdot m_j^2}. \quad (23)$$

Daraus lässt sich nun auch der unbekannte Widerstand über

$$R_x = \frac{1}{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_{iso}}} \quad (24)$$

bestimmen. Man findet so

$$R_x = (2,5 \pm 0,6) \text{ G}\Omega. \quad (25)$$

## 5.4. Skizzen der Spannungsverläufe

Im Anhang sind die sieben Spannungsverläufe der Schwingkreise aus Abschnitt 4.3 beigefügt. Dabei erkennt man für den Verlauf a) einen vom Impulsgenerator erzeugten Spannungspuls.

Im Schwingkreis b) wurde ein Kondensator parallel dazu geschaltet und man erkennt einen Abfall der Spannung, der aber nur im ersten Teil exponentiell ist und etwa in der Mitte zwischen zwei Spannungspulsen einen Wendepunkt besitzt. Im Bild c) ist zusätzlich ein Widerstand von  $2\text{ M}\Omega$  parallel dazugeschaltet, und nun erkennt man deutlich den theoretisch vorhergesagten exponentiellen Abfall der Spannung. Bei Verlauf d) wird statt des Widerstands in Höhe von  $2\text{ M}\Omega$  der unbekannte Widerstand  $R_x$  geschaltet, wodurch wie bei b) zwar ein abfallender Verlauf zu erkennen ist, der in der Mitte jedoch einen Wendepunkt hat und nicht wirklich durch eine Exponentialkurve beschrieben werden kann.

Der in e) skizzierte Verlauf zeigt einen typischen Schwingkreis: Kondensator und Spule speichern abwechselnd Energie und Spannung und durch die internen Widerstände nimmt die Spannung langsam ab. Die Folge ist also eine gedämpfte harmonische Schwingung. Beim Bild f) erwartet man ein ähnliches Bild mit anderer Periodenlänge. Man erkennt aber nur ein Maximum und ein Minimum, die in keinem analytischen Verhältnis zueinander stehen. Wahrscheinlich liegt dies daran, dass die Periodenlänge länger als der Impulsabstand ist, so dass nur eine Periode des Schwingkreises durchlaufen kann, bevor der Impulsgenerator das nächste Signal sendet und das Oszilloskop neu getriggert wird.

Zuletzt ist in g) der kommerzielle Kondensator geschaltet, welcher ein ähnliches Spannungsbild wie in c) erzeugt. Die Ähnlichkeit lässt darauf schließen, dass die Kapazitäten der Kondensatoren in der gleichen Größenordnung liegen.

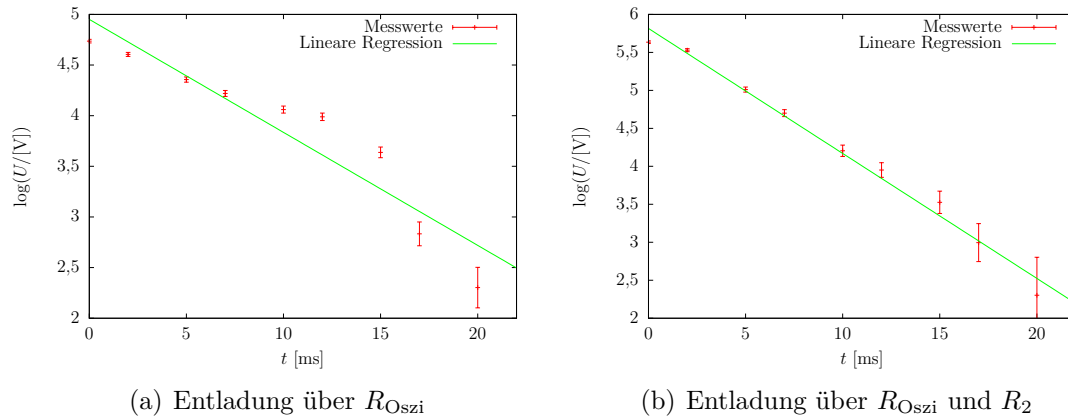
### 5.5. Kapazität $C_{Pl}$ des Plattenkondensators und Eingangswiderstand $R_{Oszi}$

Aus den Schaltkreisen b) und c) können wir mit Hilfe einer linearen Regression den Eingangswiderstand des Oszilloskops und die Kapazität des Kondensators bestimmen. Aus Gleichung (1) ist ersichtlich, dass bei einer halblogarithmischen Auftragung der Spannung  $U(t)$  gegen die Zeit eine Gerade mit der Steigung  $m = -1/RC$  zu erwarten ist. Die Diagramme dazu sind in Abbildung 6 zu finden. Bei Versuch b) gilt  $R = R_{Oszi}$  und bei Versuch c)  $R = R_{Oszi} + 2\text{ M}\Omega = R_g$ .

Die Steigungen der Geraden wurden mit Hilfe von `gnuplot` ermittelt und betragen

$$m_1 = -\frac{1}{R_{Oszi}C} = (-112 \pm 16)/(\text{F}\Omega); \quad (26)$$

$$m_2 = -\frac{1}{R_gC} = (-165 \pm 8)/(\text{F}\Omega). \quad (27)$$



**Abbildung 6:** Auswertung der Auf- und Entladung des Kondensators am Oszilloskop

Nach Gleichung (11) kann man nun den Eingangswiderstand des Oszilloskops durch

$$R_{\text{Oszi}} = \left( \frac{m_2}{m_1} - 1 \right) R_2 \quad (28)$$

bestimmen, wobei hier  $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$  gilt. Damit finden wir

$$R_{\text{Oszi}} = (0,9 \pm 0,5) \text{ M}\Omega. \quad (29)$$

Der Fehler berechnet sich hierbei nach der Fehlerfortpflanzung (e) zu

$$\sigma_{R_{\text{Oszi}}} = \frac{R_2}{|m_1|} \sqrt{\sigma_{m_2}^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} \sigma_{m_1}^2}. \quad (30)$$

Dabei haben wir den Wert von  $R_2$  als exakt angenommen. Damit können wir nun auch aus dem Zusammenhang  $m_1 = R_{\text{Oszi}}^{-1} C_{\text{Pl}}^{-1}$  die Kapazität  $C_{\text{Pl}}$  bestimmen. Der Fehler lässt sich nach (e) zu

$$\sigma_{C_{\text{Pl}}} = \frac{1}{|R_{\text{Oszi}} \cdot m_1|} \sqrt{\left( \frac{\sigma_{m_1}}{m_1} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{R_{\text{Oszi}}}}{R_{\text{Oszi}}} \right)^2} \quad (31)$$

bestimmen. So findet man schließlich

$$C_{\text{Pl}} = (9 \pm 5) \text{ nF}. \quad (32)$$

## 5.6. Unbekannter Widerstand $R_x$

In diesem Teil soll der Widerstand  $R_x$  aus der Parallelschaltung mit dem Plattenkondensator bestimmt werden. Allerdings lieferte uns das Oszilloskop statt des

## 5. AUSWERTUNG Induktivität $L$ und Widerstand $R_L$ der Drossel- und Luftspule

erwarteten exponentiellen Abfalls Verläufe, welche einen Wendepunkte enthielten und eher an lineare als exponentielle Funktionen erinnerten. Allein der Abschnitt bis zum Wendepunkt zeigt jeweils den erwarteten Spannungsverlauf.

Aus diesen Gründen haben wir auf eine weitere Auswertung verzichtet. Aufgrund des ersten Teils der Kurve können wir jedoch den Widerstandswert im Gigaohm-Bereich vermuten, was den Wert aus Abschnitt 5.3 zumindest in der Größenordnung verifizieren würde.

### 5.7. Induktivität $L$ und Widerstand $R_L$ der Drossel- und Luftspule

Aus den Schwingungskurven für die Parallelschaltung des Kondensators mit einer Spule lässt sich die Induktivität der verwendeten Spule bestimmen. Dazu untersucht man das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  und erhält durch Umstellen und Einsetzen der Zusammenhänge aus Gleichungen (6) und (7) die Beziehung

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\omega^2 + \beta^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{R^2}{4L^2}} \\ &= \frac{1}{C} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Anschließend lässt sich daraus der Verlustwiderstand  $R_L$  der Spule zu

$$R_L = \frac{2L\Lambda}{T} \quad (34)$$

berechnen. Nach der Fehlerfortpflanzung (e) erhält man die beiden Fehler durch

$$\sigma_L = L \sqrt{\frac{\sigma_C^2}{C^2} + \frac{4\Lambda^2\sigma_\Lambda^2}{(4\pi^2 + \Lambda^2)^2}}; \quad (35)$$

$$\sigma_{R_L} = R_L \sqrt{\frac{\sigma_L^2}{L^2} + \frac{\sigma_\Lambda^2}{\Lambda^2}}. \quad (36)$$

Für die Kapazität des Kondensators wird der Wert  $C_{P1} = (4,08 \pm 0,01)$  nF verwendet, den wir am Multimeter abgelesen haben.

Für die Drosselspule  $L_1$  liest man aus dem Ausdruck des Oszilloskops einige lokale Maxima ab und bildet mehrere logarithmische Dekremente. Durch Mittelwertbildung und unter Berücksichtigung der Fehlerfortpflanzung nach Gleichung (e) erhält man

$$\Lambda_1 = 1,46 \pm 0,07. \quad (37)$$

Aus dem Oszilloskop-Ausdruck liest man ferner für die Periodendauer  $T = 1,42$  ms ab. Daraus berechnet man wie oben beschrieben die Werte

$$L_1 = (11,88 \pm 0,07) \text{ H} \quad \text{und} \quad R_{L,1} = (24,4 \pm 1,2) \text{ k}\Omega. \quad (38)$$

Für die Luftspule möchte man das gleiche Verfahren anwenden. Allerdings ist auf dem Oszilloskop bei der Parallelschaltung von Kondensator und Luftspule zwischen zwei Impulsen keine volle Periode erkennbar (siehe dazu auch Abschnitt 5.4). Folglich kann auch kein logarithmisches Dekrement bestimmt werden, und somit bleibt hier auch die Induktivität unbestimmt.

## 5.8. Induktivität der Luftspule

Aus den Angaben an der Spule lässt sich die Induktivität jedoch auch rechnerisch bestimmen. Dazu verwendet man den Zusammenhang

$$L = N^2 \frac{\mu_0 A}{l}, \quad (39)$$

wobei  $l = 1$  m die Länge der Spule,  $A = 2026,83 \text{ mm}^2$  die Querschnittfläche und  $N = 2800$  die Anzahl der Windungen ist. So findet man schließlich

$$L = 0,2 \text{ H}. \quad (40)$$

## 5.9. Kapazität $C_{\text{com}}$ des kommerziellen Kondensators

Mit dem Oszilloskop wurde die Spannungskurve der Parallelschaltung aus kommerziellem Kondensator  $C_{\text{com}}$  und dem Widerstand  $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$  aufgenommen. Analog zu Abschnitt 5.5 wurde in Abbildung 7 die Zeit gegen den Logarithmus der Spannung aufgetragen.

Mittels `gnuplot` wurde ein linearer Zusammenhang gefittet, die Steigung der Fitgeraden wird angegeben durch

$$m = (-218 \pm 25) / (\text{F } \Omega). \quad (41)$$

Wir identifizieren wieder  $m = -1 / (R_{\text{Oszi}} C_{\text{com}})$  und erhalten durch Umstellen

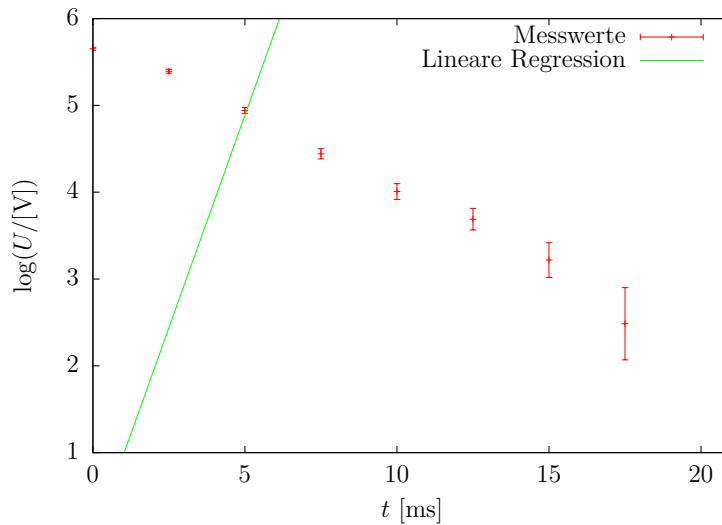
$$C_{\text{com}} = -\frac{1}{R_{\text{Oszi}} m}, \quad (42)$$

wobei der Fehler nach der Fehlerfortpflanzung gegeben ist durch

$$\sigma_{C_{\text{com}}} = \frac{1}{|R_{\text{Oszi}} m|} \sqrt{\frac{\sigma_{R_{\text{Oszi}}}^2}{R_{\text{Oszi}}^2} + \frac{\sigma_m^2}{m^2}}. \quad (43)$$

Wir verwenden für  $R_{\text{Oszi}}$  den Wert für den Eingangswiderstand am Oszilloskop aus Abschnitt 5.5. Dadurch errechnet man

$$C_{\text{com}} = (5,1 \pm 2,9) \text{ nF}. \quad (44)$$



**Abbildung 7:** Auswertung der Parallelschaltung von kommerziellem Kondensator und Widerstand

## 6. Diskussion

In diesem Abschnitt wollen wir die zahlreichen Ergebnisse nochmals sammeln und gegenüberstellen. Dabei wollen wir auch auf mögliche Fehlerursachen eingehen.

Die Bestimmung der Eichkonstanten  $\kappa$  ließ sich problemlos durchführen und der geringe Fehler ( $< 5\%$ ) der linearen Regression lässt darauf schließen, dass dieser Wert als relativ verlässlich angenommen werden kann. Da dieser Versuchsteil jedoch sehr schnell zu erledigen ist, könnte man hier eventuell noch mehr Werte aufnehmen um diesen Faktor zu verbessern, da er sich teilweise erheblich auf die weitere Auswertung auswirkt.

Im Gegensatz zur Bestimmung der Proportionalitätskonstanten ist das Ermitteln von  $\varepsilon_0$  nicht in dem Maße gelungen, wie man es sich gewünscht hat. Vor allem der erste Wert von  $\varepsilon_0 = 1,16 \times 10^{-9} \text{ C}/(\text{V m})$  liegt erstaunlich weit vom Literaturwert entfernt. Allerdings ist das Vorgehen hier auch unserer Meinung nach auch nicht sinnvoll: Das Mitteln der bewusst unterschiedlich gewählten Ladungsmengen führt zu keinen vernünftigen Ergebnis, um über die Spannung die Kapazität des Kondensators zu bestimmen. So wird mit einem schlechten Wert für die Kapazität  $\varepsilon_0$  berechnet, was folglich keine akzeptablen Ergebnisse liefert.

Der zweite Wert mit einer Abweichung von etwa  $12\%$  vom Literaturwert ist hier schon besser. Hier wurde zur Auswertung auch der vom Multimeter bestimmte Wert für die Kapazität des Plattenkondensators verwendet und die Ladungsmenge mit Hilfe von  $\kappa$  aus der Anzeige des Ladungsmessgerätes ausgerechnet.

Bei der Bestimmung der Widerstände  $R_{iso}$  und  $R_x$  über das Entladen des Kondensators konnten wir zumindest für den Gesamtwiderstand einen akzeptablen Wert erreichen. Bei der Messung des Isolationswiderstands alleine sind die Messdaten jedoch sehr schlecht ausgefallen und die lineare Regression nicht wirklich zu begründen – ebenso könnten anderen Funktionen an diese Messdaten angelegt werden. Die Größenordnung konnte jedoch mit einiger Sicherheit auf den Gigaohmbereich festgelegt werden. Dies wird auch durch den nur halb geglückten Abschnitt 5.6 gestützt, wobei hier aufgrund des schlechten Bildes auf dem Oszilloskop keine Vergleichswerte vorliegen. Generell könnte dieser Abschnitt dahingehend verbessert werden, dass die Frequenz der Spannungspulse geregelt werden könnte, so dass zum Beispiel auch die Luftspule vermessen werden kann und die Schwingung nicht nach einer Periode abgebrochen wird.

Die durch die Entladevorgänge am Kondensator konnten wir weiter die Kapazität des Plattenkondensators auf  $C_{Pl} = (9 \pm 5)$  nF bestimmen und den Eingangswiderstand des Oszilloskops zu  $R_{Osz} = (0,9 \pm 0,5)$  M $\Omega$ . Verglichen mit den vom Multimeter bestimmten Werten von 4,08 nF und 11 M $\Omega$  fällt vor allem der große Unterschied beim Eingangswiderstand auf. Hier ist allerdings nicht ganz klar, worauf sich die 11 M $\Omega$  beziehen, da je nach Eingang stark schwankende Werte festgestellt werden, welche auch in dem Bereich von 1 M $\Omega$  liegen, was sich mit den anderen Daten eher decken würde. Zusätzlich bemerkt man, dass der Multimeterwert für die Kapazität in dem Fehlerbereich des anderen experimentellen Wertes liegt, wobei der Fehlerbereich mit über 50 % auch extrem groß ist.

Für die Drosselspule konnten dank des gut erkennbaren Schwingungsverlaufs einige Werte für die Bestimmung des logarithmischen Dekrements und damit auch für die Induktivität abgelesen werden. Allerdings erkennt man auch einen großen Unterschied (24 k $\Omega$  vs. 0,753 k $\Omega$ ) zwischen den Werten für  $R_L$ , welcher einmal aus dem logarithmischen Dekrement beziehungsweise der Induktivität und durch das Multimeter bestimmt wurde. Dieser Unterschied wird auch in der Anleitung angesprochen kann von uns aber so erst einmal nicht zufriedenstellend erklärt werden.

Wie bereits bei der Beschreibung der Spannungsverläufe vermutet wurde, besitzen die beiden verwendeten Kondensatoren ähnliche Kapazitäten. Laut Multimeter lauten diese Werte  $C_{Pl} = 4,08$  nF und  $C_{com} = 3,84$  nF. Aus dem Entladevorgang des kommerziellen Kondensators über den 2 M $\Omega$  Widerstand konnte die Kapazität zu  $C_{com} = (5,1 \pm 2,9)$  nF bestimmt werden, wodurch der Multimeterwert wieder im Fehlerbereich dieses Wertes liegt.

Weitere Vergleiche zwischen den Messwerten (insbesondere von der Luftspule und des unbekanntem Widerstands  $R_x$ ) sind hier leider nicht möglich, da die entsprechenden Versuchsteile nicht richtig funktioniert haben. Allerdings konnte man feststellen, dass Widerstände im Bereich von mehreren Gigaohm nicht einfach durch ein Multimeter gemessen werden können, da diese nur eine sehr



## 6. DISKUSSION

---

begrenzte Messspanne besitzen und für das Vermessen von so großen Widerständen komplexere Aufbauten nötig sind und eine direkte Messung nicht mehr möglich ist.

## A. Formelsammlung

### A.1. Mittelwertbildung

Hat man  $n$  Messwerte  $x_i$  einer Messgröße  $x$  aufgenommen, so berechnet sich das *arithmetische Mittel* der Größe  $x$  zu

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{a})$$

und der Fehler dieses Mittelwertes ist gegeben durch

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}. \quad (\text{b})$$

Hat man hingegen in verschiedenen Messungen  $n$  voneinander unabhängige Werte  $x_i$  mit unterschiedlichen Fehlern  $\sigma_i$  aufgenommen, so berechnet man das *gewichtete Mittel* dieser Messgröße  $x$  mit

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (\text{c})$$

und den Fehler des Mittelwerts durch

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (\text{d})$$

### A.2. Fehlerfortpflanzung

Betrachtet man eine Messgröße  $y$ , die sich über eine Vorschrift  $y = y(x_1, \dots, x_n)$  aus  $n$  verschiedenen Messgrößen  $x_i$  ergibt, so möchte man wissen, welcher Fehler für  $y$  sich aus den Fehlern  $\sigma_i$  der Messgrößen  $x_i$  ergibt. Nach dem Gesetz zur Fehlerfortpflanzung berechnet man den Fehler durch

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2}. \quad (\text{e})$$

## B. Literaturverzeichnis

- [KI] Gustav Robert Kirchhoff. *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus. Band 3.* Leipzig, 1891.
- [LP] Lehrportal Physik. *Messung großer Widerstände.* Online im Internet: <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/4070>, abgerufen am 04.09.12, 12:31 Uhr.