Grundpraktikum der Fakultät für Physik
Georg–August–Universität Göttingen

Versuch 11
Die Potenzialwaage

Praktikant:	Joscha Knolle
	Ole Schumann
E-Mail:	joscha@htilde.de
Durchgeführt am:	07.09.2012
Abgabe:	10.09.2012

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das fundamentale, experimentalgestütze Gesetz der Elektrodynamik ist das Coloumbsche Gesetz, das die Anziehungskraft zwischen zwei elektrischen Ladungen beschreibt. In der dort formulierten Proportionalitätskonstante zwischen der Kraft einerseits sowie beiden Ladungen und dem Kehrwert des Abstandsquadrats andererseits findet sich die Permittivitätskonstante ε_0.

In diesem Versuch soll diese Naturkonstante bestimmt werden. Die Potenzialwaage war dabei einer der ersten Versuche, mit dem die elektrische Kraftwirkung bestimmt worden ist.

2. Theorie

Ein Kondensator ist ein Aufbau aus zwei entgegengesetzten Leiterflächen. Bringt man auf die eine Fläche eine Ladung $+Q$, so bildet sich auf der dieser Fläche zugewandten Seite der anderen Fläche durch Influenz eine Ladung $-Q$ und auf der anderen Seite eine Ladung $+Q$. Erdet man die zweite Fläche mit dem Erdpol der Spannungsquelle, die die erste Platte aufgeladen hat, so fließt $+Q$ ab und es verbleibt die Ladung $-Q$ auf der zweiten Platte.

Das elektrische Feld im Inneren eines Kondensators ist proportional zur Ladung Q auf den Leiterflächen. Da für die elektrische Spannung $U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ gilt, ist auch die Spannung proportional zur Ladung. Die Proportionalitätskonstante

$$Q = C \cdot U \tag{1}$$

heißt *Kapazität* und hängt nur von der Geometrie des Kondensators ab. [DEM, S. 19 f.]

Außerdem untersuchen wir, welche Kräfte zwischen den Flächen eines Kondensators wirken, und betrachten dazu einen Kondensator, der auf eine Ladung Q aufgeladen wird. Kommt in einem Schritt eine Ladung $\mathrm{d}Q$ auf die Kondensatorflächen, so liefert diese Ladung einen Beitrag $\mathrm{d}F = E \cdot \mathrm{d}Q$ zur Anziehungskraft hinzu. Insgesamt gilt für die Kraft also

$$F = \int_0^Q \mathrm{d}F = \int_0^Q E \cdot \mathrm{d}Q. \tag{2}$$

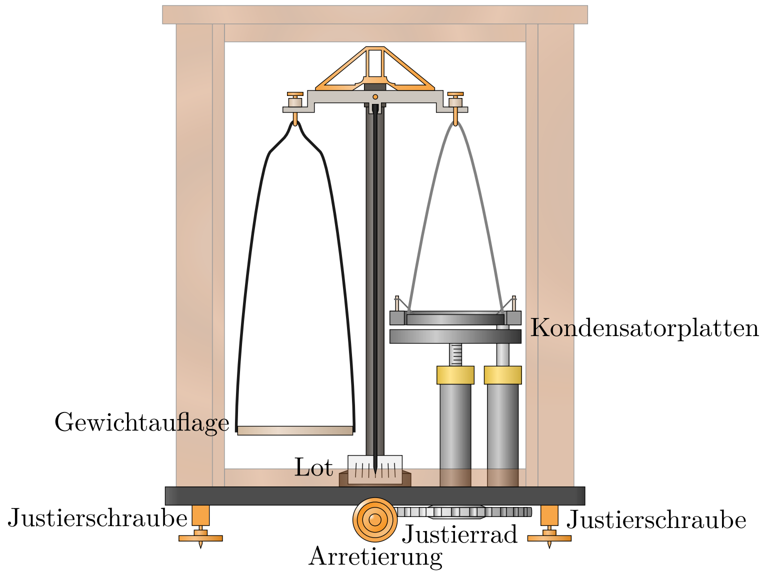


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus [LP, S. 2]

3. Materialien & Methoden

3.1. Versuchsaufbau

Die verwendete Versuchsapparatur ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt. In einem Gehäuse aus Holz und Glas ist eine Waage angebracht, auf deren linke Schale Gewichte gelegt werden können und deren rechte Schale die obere Platte eines Plattenkondensators bildet. Der Plattenabstand kann durch ein Justierrad an der unteren Kondensatorplatte geändert werden. Im „leeren“ Zustand (also ohne aufgelegte Gewichte und ohne angelegte Spannung) kann die Apparatur justiert und arretiert werden.

Die Apparatur ist vollständig geschaltet und justiert. Die Praktikanten arretieren nur noch, legen die Präzisionsgewichte mit einer Pinzette auf (um gewichtsrelevante Fettabdrücke zu vermeiden) und regeln die angelegte Spannung sowie den Plattenabstand.

3.2. Plattenkondensator

Bei einem wie im Versuchsaufbau beschriebenen Plattenkondensator ist die Kapazität proportional zur Fläche A der Kondensatorplatten und zum reziproken Abstand $1/d$ zwischen den beiden Kondensatorplatten. Es ergibt sich also nach [DEM, S. 21]

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \tag{3}$$

Die Fläche des Kondensators beträgt mit der Korrektur für den Schlitz

$$A = \pi \left(r^2 + ra\right). \tag{4}$$

Da in der Apparatur die Kraft F, der Plattenabstand d und die angelegte Spannung Q variiert werden können, benötigen wir Zusammenhänge zwischen diesen Messgrößen. Dazu betrachten wir das elektrische Feld, das beim Plattenkondensator durch $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$ gegeben ist, und erhalten für die Kraft zwischen den Kondensatorplatten nach Gleichung (2)

$$F = \int_0^Q \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A E^2. \tag{5}$$

Da die Feldstärke beim Plattenkondensator die Bedeutung Spannung pro Plattenabstand besitzt, $E = \frac{U}{d}$ [DEM, S. 20], und sie im Gleichgewicht der Gewichtskraft $F = mg$ entspricht, erhält man

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 A \frac{U^2}{d^2} = mg \tag{6}$$

und durch Umformen sowie Einsetzen erhält man die Zusammenhänge

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \pi}{2mg} (r^2 + ra)} U \tag{7}$$

sowie

$$mg = \frac{\varepsilon_0 \pi}{2d^2} \left(r^2 + ra\right) U^2. \tag{8}$$

Nach [LP, S. 3] hat der verwendete Versuchsaufbau als Werte für die Parameter

$$r = 40\,\mathrm{mm}; \qquad a = 1\,\mathrm{mm}. \tag{9}$$

4. Durchführung

4.1. Erste Versuchsreihe

In der ersten Versuchsreihe werden die Kraft F und die Spannung U vorgegeben und der Plattenabstand d bestimmt. Dazu wird die Kraft durch Auflage der Gewichte von 3 g, 4 g und 5 g variiert und die Spannung auf 2 kV, 3 kV, 4 kV und 5 kV eingestellt. Dabei muss die Spannung aber mindestens so groß sein, dass die obere Kondensatorplatte nicht abgehoben wird. Dann wird der Plattenabstand solange vergrößert, bis die obere Kondensatorplatte gerade abgehoben wird, und dieser Wert für d notiert. Für jede Konfiguration der Parameter wird die Messung dreimal durchgeführt.

4.2. Zweite Versuchsreihe

Als zweite Versuchsreihe werden der Plattenabstand d und die Kraft F vorgegeben und die Spannung U untersucht. Dazu wird der Plattenabstand auf 3 mm, 3,5 mm, 4 mm und 5 mm eingestellt und die Kraft durch aufgelegte Gewichte aus 1 g, 2 g, 3 g und 4 g variiert. Dann wird die Spannung solange verkleinert, bis die obere Kondensatorplatte gerade abgehoben wird, und der Wert für U notiert. Wieder wird für jede Parameter-Konfiguration die Messung dreimal durchgeführt.

5. Auswertung

5.1. Erste Versuchsreihe

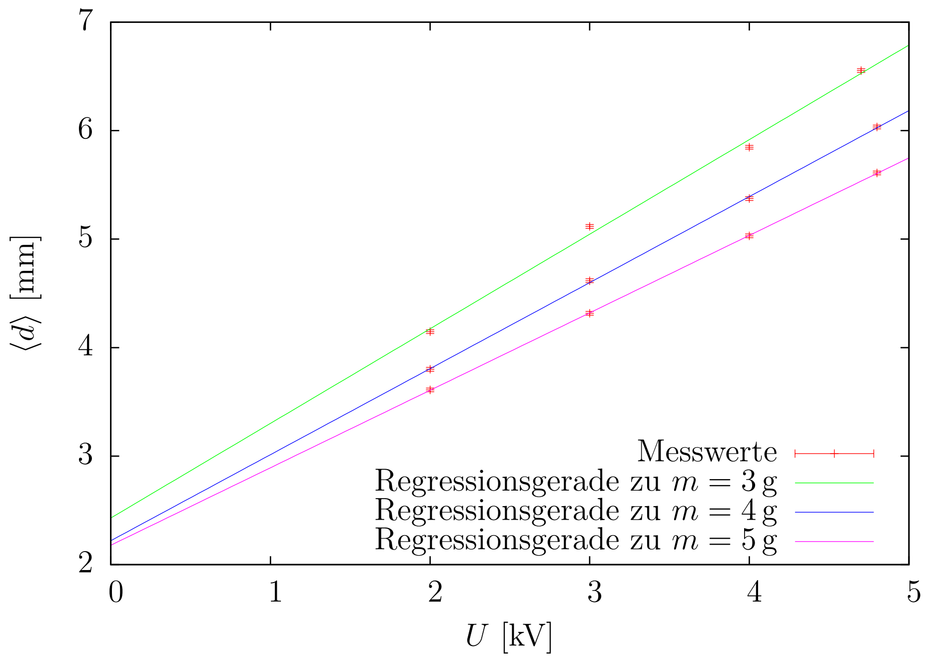


Abbildung 2: Messwerte der ersten Versuchsreihe

Für die Messwerte der ersten Versuchsreihe ist in Abbildung 2 die Spannung U gegen den mittleren Abstand $\langle d\rangle$ bei verschiedenen (konstanten) Kräften mg aufgetragen. Dazu wurden aus den je drei Messwerten der Mittelwert nach Gleichung (a) gebildet, nach der Fehlerfortpflanzung (e) ergibt sich aus dem Fehler der Einzelmessung σ_d der Fehler des Mittelwertes zu

$$\sigma_{\langle d\rangle} = \sigma_d/\sqrt{3}. \qquad (10)$$

Mit `gnuplot` wurde für jede Masse außerdem ein linearer Zusammenhang $\langle d \rangle = \alpha U + \beta$ gefittet. Die Ergebnisse für die Fitparameter sind in Tabelle 1 aufgetragen. Nach Gleichung (7) identifiziert man den Fitparameter α mit $\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \pi}{mg}} \left(r^2 + ra\right)$. Umgestellt ergibt sich die Formel

$$\varepsilon_0 = \frac{\alpha^2 mg}{\pi \left(r^2 + ra\right)}, \tag{11}$$

über die man die Permittivitätskonstante ε_0 erhält. Nach dem Gesetz über die Fehlerfortpflanzung (e) erhält man für ε_0 einen Fehler

$$\sigma_{\varepsilon_0} = 2\sigma_\alpha \frac{\varepsilon_0}{\alpha}. \tag{12}$$

Die so erhaltenen Werte für die Permittivitätskonstante bei den verschiedenen Kräften sowie der gewichtete Mittelwert sind ebenfalls in Tabelle 1 aufgetragen.

m [g]	α [mm/kV]	β [mm]	ε_0 [$10^{-12}\,\mathrm{C/(V\,m)}$]
3	$0{,}87 \pm 0{,}04$	$2{,}43 \pm 0{,}14$	$8{,}7 \pm 0{,}8$
4	$0{,}793 \pm 0{,}010$	$2{,}22 \pm 0{,}04$	$7{,}20 \pm 0{,}17$
5	$0{,}714 \pm 0{,}003$	$2{,}178 \pm 0{,}010$	$5{,}82 \pm 0{,}05$
Gewichtetes Mittel			$5{,}92 \pm 0{,}05$

Tabelle 1: Ergebnisse der ersten Versuchsreihe

Weiterhin betrachtet man den zweiten Parameter β. Da in der vorliegenden Apparatur der Abstand der Kondensatorplatten nicht absolut abgemessen werden konnte, sondern die Skala um eine Nullpunktskorrektur Δ vom wahren Nullpunkt verschoben wurde, erhalten wir mit β einen nicht-verschwindenden y-Achsenabschnitt. Wir erhalten die Nullpunktskorrektur Δ dann durch Bildung des gewichteten Mittels nach Gleichung (c) mit dem Fehler aus (d) aus den drei Werten für den y-Achsenabschnitt β mit

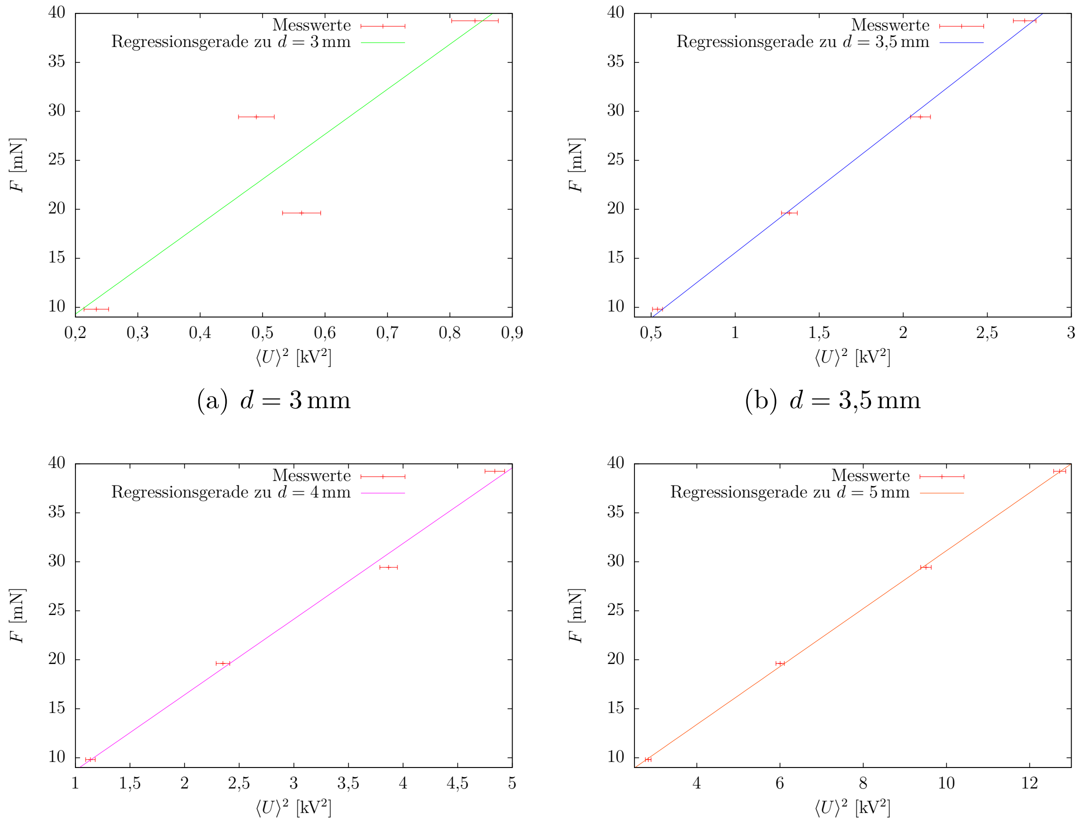
$$\Delta = (2{,}18 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}. \tag{13}$$

Der wahre Plattenabstand ergibt sich dann zu

$$d_w = d - \Delta. \tag{14}$$

5.2. Zweite Versuchsreihe

Die Messwerte der zweiten Versuchsreihe sind in Abbildung 3 aufgetragen. Dazu wurden zunächst die Mittelwerte der Spannung $\langle U \rangle$ für jede Parameter-Konfiguration bestimmt, der Fehler ergibt sich analog zu Gleichung (10) zu $\sigma_{\langle U \rangle} = \sigma_U / \sqrt{3}$. Dann wird die zweite Potenz der Spannung $\langle U \rangle^2$ gegen die Kraft



(a) $d = 3$ mm (b) $d = 3{,}5$ mm

(c) $d = 4$ mm (d) $d = 5$ mm

Abbildung 3: Messwerte der zweiten Versuchsreihe

mg bei verschiedenen (konstanten) Plattenabständen d aufgetragen und mit `gnuplot` ein linearer Zusammenhang $mg = \gamma \langle U \rangle^2 + \delta$ gefittet. Dabei wurde für $\langle U \rangle^2$ nach der Fehlerfortpflanzung (e) der Fehler $\sigma_{\langle U \rangle^2} = \sqrt{2} \langle U \rangle \sigma_{\langle U \rangle}$ bestimmt. Nach Gleichung (8) identifiziert man γ mit $\frac{\varepsilon_0 \pi}{2d^2} \left(r^2 + ra\right)$ und erhält durch Umstellen sowie Berücksichtigung des wahren Abstands aus Gleichung (14) den Zusammenhang

$$\varepsilon_0 = \frac{2\gamma \left(d - \Delta\right)^2}{\pi \left(r^2 + ra\right)}. \tag{15}$$

Für diese Werte von ε_0 ergibt sich der Fehler nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{\varepsilon_0} = \sqrt{\sigma_\gamma^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon_0}{d_w} \sigma_{d_w}\right)^2}. \tag{16}$$

Die Fitparameter, die so erhaltenen Werte für ε_0 und das gewichtete Mittel sind in Tabelle 2 aufgeführt.

d_w [mm]	γ [mN/kV^2]	δ [mN]	ε_0 [10^{-12} C/(V m)]
0,82	$45{,}9 \pm 15{,}3$	0 ± 9	12 ± 4
1,32	$13{,}3 \pm 0{,}6$	$2{,}2 \pm 1{,}0$	$9{,}0 \pm 0{,}4$
1,82	$7{,}7 \pm 0{,}5$	$1{,}0 \pm 1{,}5$	$9{,}9 \pm 0{,}6$
2,82	$2{,}96 \pm 0{,}04$	$1{,}6 \pm 0{,}4$	$9{,}10 \pm 0{,}14$
Gewichtetes Mittel			$9{,}13 \pm 0{,}13$

Tabelle 2: Ergebnisse der zweiten Versuchsreihe

6. Diskussion

Die gesuchte Naturkonstante ε_0 haben wir in diesem Versuch mittels zweier leicht unterschiedlicher Methoden bestimmt. Dabei erhielten wir die Werte

$$\varepsilon_{0,a} = (5{,}92 \pm 0{,}05) \times 10^{-12}\,\mathrm{C/(V\,m)},$$
$$\varepsilon_{0,b} = (9{,}13 \pm 0{,}13) \times 10^{-12}\,\mathrm{C/(V\,m)}.$$

Verglichen mit dem Literaturwert aus [COD] von

$$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}\,\mathrm{C/(V\,m)}$$

bedeutet dies Abweichungen von 33 % beziehungsweise 3 %. Es fällt also auf, dass die zweite Messmethode einen wesentlich besseren Wert geliefert hat als die erste. Man erkennt, dass der Wert der zweiten Methode sogar noch besser wäre, wenn man den ersten Wert für ε_0 in dieser Reihe vernachlässigt, da dieser offenbar wenig präzise ist. Schon in Abbildung 3(a) erkennt man, dass die Ausgleichsgerade nur wenig Punkte direkt trifft und die Punkte untereinander stark schwanken. Auch der große Fehler bei der Steigung dieser Geraden von etwa 33 % zeigt an, dass dieser Wert nicht sehr verlässlich ist.

Erklären kann man diesen Fehler unter Umständen damit, dass der wahre Abstand der Kondensatorplatten nicht 3 mm betrug, sondern nach Korrektur nur ungefähr 0,8 mm. Laut Angaben am Versuch sollte jedoch der Plattenabstand immer mindestens 1 mm betragen. Da wir jedoch den wahren Plattenabstand erst mit der Auswertung erhalten haben, konnten wir im Versuch diesen systematischen Fehler nicht korrigieren. In Folge des zu kleinen Abstandes kam es wahrscheinlich zu kleinen Überschlägen zwischen den Platten, was die Messung verfälschte.

In der ersten Messreihe fällt auf, dass die ersten beiden Werte für ε_0 besser zu dem Literaturwert passen als der dritte Wert, welcher aufgrund seines kleinen Fehlers das gewichtete Mittel stark beeinflusst.

A. Formelsammlung

A.1. Mittelwertbildung

Hat man n Messwerte x_i einer Messgröße x aufgenommen, so berechnet sich das *arithmetische Mittel* der Größe x zu

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{a}$$

und der Fehler dieses Mittelwertes ist gegeben durch

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2}. \tag{b}$$

Hat man hingegen in verschiedenen Messungen n voneinander unabhängige Werte x_i mit unterschiedlichen Fehlern σ_i aufgenommen, so berechnet man das *gewichtete Mittel* dieser Messgröße x mit

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}} \tag{c}$$

und den Fehler des Mittelwerts durch

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \tag{d}$$

A.2. Fehlerfortpflanzung

Betrachtet man eine Messgröße y, die sich über eine Vorschrift $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ aus n verschiedenen Messgrößen x_i ergibt, so möchte man wissen, welcher Fehler für y sich aus den Fehlern σ_i der Messgrößen x_i ergibt. Nach dem Gesetz zur Fehlerfortpflanzung berechnet man den Fehler durch

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2}. \tag{e}$$

B. Literaturverzeichnis

[COD] Committee on Data for Science and Technology. *Fundamental Physical Constants. Electric Constant.* Online im Internet: `http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?ep0`, abgerufen am 08.09.12, 20:27 Uhr.

[DEM] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik.* Vierte Auflage. Berlin, 2006.

[GRI] David Griffiths. *Introducton to Electrodynamics.* Dritte Auflage. Neu-Delhi, 2011.

[LP] Lehrportal Physik. *Die Potenzialwaage.* Online im Internet: `http://lp.uni-goettingen.de/get/pdf/3664`, abgerufen am 30.08.12, 11:44 Uhr.