

Versuch 9

Diffusion

Praktikant: Joscha Knolle
 Ole Schumann
E-Mail: joscha@htilde
Durchgeführt am: 30.04.2012
Abgabe: 07.05.2012

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Theorie	2
2.1. Brownsche Molekularbewegung	2
2.2. Ficksche Gesetze	2
2.3. Lösung der Diffusionsgleichung	3
3. Durchführung	4
3.1. Versuchsaufbau	4
3.2. Photowiderstand	4
3.3. Wheatstonesche Messbrücke	4
3.4. Versuchsdurchführung	5
4. Auswertung	6
4.1. Qualitative Betrachtung	6
4.2. Diffusionskoeffizient	7
4.3. Konzentrationsprofil	8
5. Diskussion	8
A. Tabellen und Grafiken	I

1. Einleitung

In diesem Versuch beschäftigen wir uns mit der Diffusion, also einem Prozess, bei dem sich unterschiedliche Teilchenkonzentrationen ausgleichen und zu einer Durchmischung von z. B. zwei Flüssigkeiten führen. Ursache dieses Prozesses ist die BROWNSCHE Molekularbewegung. Es lässt sich beobachten, dass sich Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen auf Grund ihrer Wärmeenergie bewegen und es so zu einer Vermischung von vorher getrennten Stoffen kommt.

Wir werden uns in diesem Versuch mit der Vermischung von Wasser und dem Farbstoff Methylenblau beschäftigen und dabei die Konzentration des Methylenblaus in Abhängigkeit von der Zeit und des Ortes messen.

2. Theorie

2.1. Brownsche Molekularbewegung

Der schottische Botaniker Robert BROWN beobachtete unter einem Mikroskop, dass sich Pollen in einem Wassertropfen unregelmäßig und scheinbar wahllos bewegen.

Die Bewegung der Pollen konnte er darauf zurückführen, dass die Wassermoleküle permanent mit den Pollen zusammenstoßen und so Impulse auf diese übertragen. Die Wassermoleküle bewegen sich wiederum auf Grund ihrer thermischen Energie.

Durch diese Stöße wirken von verschiedenen Seiten unterschiedlich starke Kräfte und es kommt zu einer chaotischen Bewegung. So können sich Moleküle durch eine Flüssigkeit bewegen, obwohl diese in Ruhe ist und Phänomene wie die Diffusion erklärt werden.

2.2. Ficksche Gesetze

Physikalische Systeme sind immer bestrebt, einen Zustand mit möglichst geringer Energie zu erreichen. So stellt ein System, in dem sich zwei Sorten von Molekülen in einer bestimmten Anordnung befinden, einen geordneten Zustand dar, also einen Zustand mit höherer Energie. Das System versucht nun durch Erzeugung von Unordnung – also Vermischung der Moleküle – dafür zu sorgen, dass die innere Energie des Systems gesenkt wird.

Konkret auf den vorliegenden Versuch angewendet bedeutet dies, dass die erhöhte Teilchendichte $\rho(x)$ von Methylenblaumolekülen im oberen Teil der Küvette dafür sorgt, dass es einen Teilchenstrom in Richtung des Wassers gibt. Verursacht wird

dieser Strom durch die BROWNSCHE Molekularbewegung. Mathematisch lässt sich dieser Strom durch das 1. FICKSCHE GESETZ beschreiben:

$$\vec{j}(\vec{x}) = -D \cdot \vec{\nabla} \rho(x). \quad (1)$$

Diese Formulierung besagt, dass der Teilchenstrom immer entgegen dem stärksten Anstieg der Teilchendichte $\rho(x)$ gerichtet ist, wobei D eine stoffspezifische Konstante ist, die so genannte „Diffusionskonstante“.

Natürlich bleibt die Anzahl der Teilchen während des Diffusionsvorgangs konstant, weshalb die Teilchendichte in einem Teilvolumen abnehmen muss, wenn mehr Teilchen heraus als herein strömen. Dies wird durch das 2. FICKSCHE GESETZ beschrieben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}). \quad (2)$$

Setzt man nun Gleichung (2) in (1) ein, erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \cdot (-D \cdot \vec{\nabla} \rho(x)) = D \cdot \Delta \rho, \quad (3)$$

wobei $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ den Laplace-Operator beschreibt. Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (die Diffusionsgleichung) kann z. B. durch *Fouriertransformation* gelöst werden.

2.3. Lösung der Diffusionsgleichung

Die einzelnen Schritte zur Lösung werden hier nicht explizit durchgeführt. Dazu sei beispielsweise auf die Praktikumsanleitung, das Lehrportal oder auf das Buch „*Physikalisches Praktikum*“ von Dieter Geschke verwiesen.

Durch Fouriertransformation erhält man eine einfache Differentialgleichung, welche mit einem Exponentialansatz gelöst werden kann:

$$\frac{\partial F(\rho)}{\partial t} = -k^2 D F(\rho) \quad (4)$$

$$\Rightarrow F(\rho) = A \exp(-k^2 D t). \quad (5)$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen und Rücktransformation liefert schließlich

$$\rho(x, t) = \frac{c_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad (6)$$

mit der GAUSSSCHEN FEHLERFUNKTION

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-v^2} dv. \quad (7)$$

3. Durchführung

3.1. Versuchsaufbau

Zur Untersuchung des Diffusionsvorgangs werden in zwei Küvetten Wasser und Methylenblau übereinander geschichtet, so dass sich ein vertikales Konzentrationsprofil ausbilden kann. Diese Küvette wird mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe bestrahlt, welches vorher mit einer Linse fokussiert wurde.

Das Licht, welches durch das Gemisch geleitet wurde, fällt anschließend auf eine Photozelle und erzeugt so einen messbaren Widerstand. Damit kann die Konzentration des Methylenblaus durch die Lichtintensität des durchgelassenen Lichtes und den daraus resultierenden Photowiderstand gemessen werden.

3.2. Photowiderstand

Das Licht, welches von der Quecksilberdampflampe durch die Küvette geleitet wurde, trifft auf einen Photowiderstand, welcher die Lichtintensität in eine dazu proportionale Spannung umwandelt.

Hauptbestandteil des Photowiderstands ist eine Halbleiterschicht, auf welche die Photonen aus dem Lichtstrahl treffen. Diese geben ihre Energie an die gebundenen Elektronen ab und heben diese vom Valenzband auf das energetisch höher liegende so genannte Leitungsband. Dadurch erhöht sich die Leitfähigkeit der Einheit, der Widerstand sinkt also. Da die Anzahl der Photonen proportional zur Intensität des Lichtes und antiproportional zum Widerstand ist, ergibt sich ein antiproportionales Verhältnis von Widerstand zur Lichtintensität. Diese wiederum ist ein Maß für die Konzentration des Methylenblaus, so dass auf diesem Weg Rückschlüsse auf die Konzentration – und damit auch auf den Fortschritt der Diffusion – gezogen werden können.

3.3. Wheatstonesche Messbrücke

Eine direkte Messung des Widerstands mit normalen Messgeräten würde eine zu starke Verfälschung des Ergebnisses auf Grund der hohen Innenwiderstände der Geräte nach sich ziehen. Um dieses Problem zu umgehen und eine möglichst präzise Messung zu gewährleisten, wird der Widerstand indirekt über eine WHEATSTONESCHE Messbrücke ermittelt.

Diese besteht aus drei Widerständen, wobei der erste Widerstand R_0 fest gewählt ist, der Widerstand am Potentiometer R regelbar ist und der Photowiderstand

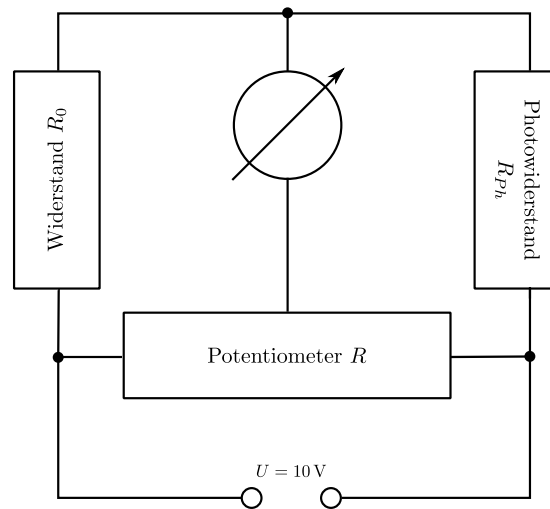


Abbildung 1: Schaltplan der Wheatstoneschen Messbrücke

R_{ph} bestimmt werden soll. In Abbildung 1 ist der Schaltplan der verwendeten Schaltung zu finden.

3.4. Versuchsdurchführung

Es werden insgesamt vier Messreihen durchgeführt. Für die ersten beiden Messreihen wird die Messbrücke mit Hilfe eines Graufilters auf eine bestimmte Konzentration geeicht, also der Widerstand am Potentiometer so eingestellt, dass eine Stromstärke von 0 A bei eingelegtem Graufilter gemessen wird. Anschließend wird je eine Küvette, welche zu drei Vierteln mit Wasser und einem Viertel mit Methylenblau gefüllt ist, in den Lichtkanal eingeführt und dreißig Minuten beobachtet.

Dazu wird alle dreißig Sekunden die Höhe der Küvette im Lichtkanal so angepasst, dass wieder eine Stromstärke von 0 A gemessen wird. Dadurch kann die relative Höhe einer gewissen Konzentration über die Zeit verfolgt werden. Für die erste Küvette wird die Messbrücke auf $c_0/16$, für die zweite Küvette auf $c_0/32$ geeicht. Beide Messreihen werden nacheinander durchgeführt, wobei zwei Uhren verwendet werden, so dass auch die Zeitmessung der ersten Küvette nach der zweiten Messreihe weiter verwendet werden kann.

In der dritten und vierten Messreihe wird die Höhe einer bestimmten Konzentration in der Küvette bei konstanter Zeit bestimmt. Dadurch wird die Messbrücke wie oben auf verschiedene Bruchteile der Anfangskonzentration c_0 geeicht und anschließend die relative Höhe dieser Konzentration in der Küvette abgelesen. Dabei beginnt man bei der insgesamt dritten Messreihe mit der zweiten Küvette, wobei wir das Höhenprofil zwischen der 37. und der 47. Minute bestimmt haben.

Abschließend wird in der vierten Messung wieder die erste Küvette untersucht, wobei die Bestimmung des Höhenprofils bei uns zwischen der 87. und der 96. Minute nach Befüllen der Küvette stattfand.

4. Auswertung

4.1. Qualitative Betrachtung

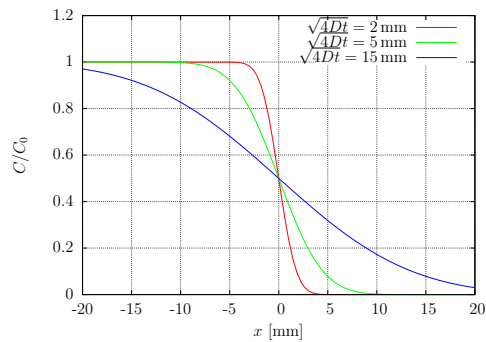


Abbildung 2: Diffusionskurven

$$C = \frac{C_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(x / \sqrt{4Dt} \right) \right]$$

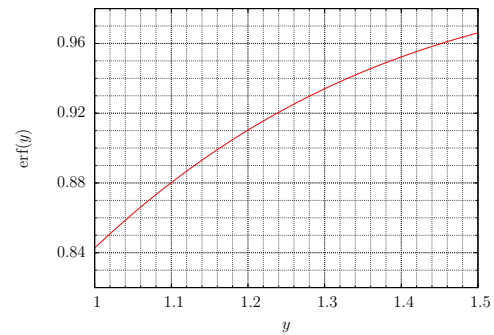


Abbildung 3: Fehlerfunktion

In Abbildung 2 sind für verschiedene Messzeiten die Diffusionskurven nach dem zweiten Fickschen Gesetz, also Gleichung (6) folgend, aufgetragen. Wir wollen nun zunächst die vier Messreihen anhand dieser Abbildung in den physikalischen Zusammenhang einordnen.

Bei den ersten beiden Messreihen wurde die Höhe einer gewissen Konzentration im zeitlichen Verlauf bestimmt. In der Abbildung bewegen wir uns dabei parallel zur x -Achse, die Konzentration C bleibt also gleich. Insbesondere gilt für diese beiden Messreihen

$$\frac{x}{\sqrt{4Dt}} = \text{const.} \quad (8)$$

Hingegen haben wir bei den letzten beiden Messreihen, bei näherungsweise konstanter Zeit, die Höhe unterschiedlicher Konzentrationen betrachtet. Wir bewegen uns in der Abbildung also auf einer Kurve bei fester Zeit.

	m [$\mu\text{m}^2/\text{min}$]	σ_m [$\mu\text{m}^2/\text{min}$]	b [m^2/min]	σ_b [m^2/min]	D [m^2/min]
Messreihe 1	72 000	2000	-320 000	40 000	15 200 \pm 500
Messreihe 2	129 000	4000	-510 000	60 000	18 500 \pm 600

Tabelle 1: Ergebnisse der linearen Regression

4.2. Diffusionskoeffizient

Lösen wir für die Bestimmung der Diffusionskonstante zunächst die Gleichung (6) nach D auf:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = 1 - \frac{2c}{c_0}. \quad (9)$$

Aus Abbildung 3 liest man näherungsweise für $c = c_0/16$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1,09 \quad (10)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1,09^2 \cdot 4Dt = 4,7524Dt \quad (11)$$

und für $c = c_0/32$

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{4Dt}} = 1,32 \quad (12)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1,32^2 \cdot 4Dt = 6,9696Dt \quad (13)$$

ab.

Trägt man das Quadrat der Diffusionsstrecke gegen die Diffusionszeit auf, ist für die ersten beiden Messreihen folglich ein linearer Zusammenhang zu erwarten. Die Diffusionsstrecke x errechnet sich aus der gemessenen relativen Höhe h durch

$$x = h - h_0. \quad (14)$$

Der Fehler der Diffusionsstreckenquadrate errechnet sich daher nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{x^2} = \sqrt{8} \cdot \sigma_h^2 \cdot |h - h_0|. \quad (15)$$

Mittels `gnuplot` wird eine lineare Regression der Messwerte durchgeführt. Das Ergebnis für die Steigung m und den y -Achsenabschnitt b sowie die daraus errechneten Werte sind in Tabelle 1 einzusehen. Als gewichteter Mittelwert ergibt sich mit der Fehlerformel für stark abweichende Werte (vgl. Praktikumsanleitung, Seite 19) das Ergebnis

$$D = (16\,600 \pm 1700) \mu\text{m}^2/\text{min} = (2,77 \pm 0,29) \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (16)$$

4.3. Konzentrationsprofil

Die Ergebnisse der Messreihen 3 und 4 sind in den Abbildungen C und D zu finden. Dazu wurde die Diffusionsstrecke x aus den Mittelwerten der relativen Höhen h bestimmt durch

$$x(c) = \frac{h_1(c) + h_2(c)}{2} - h(c_0/2), \quad (17)$$

da die Höhe bei der Konzentration $c_0/2$ als Ausgangspunkt der Diffusion angenommen werden kann. Zusätzlich sind die Diffusionskurven für den Anfangs- und Endzeitpunkt der jeweiligen Messreihe aufgetragen. Verwendet wurde dazu die in (16) errechnete Diffusionskonstante.

In den beiden Abbildungen erkennt man jeweils, dass zwischen den beiden Diffusionskurven zu Beginn und zum Ende der Messung nur ein geringer Widerstand besteht. Deshalb kann man also annehmen, dass das Konzentrationsprofil bei einer konstanten Zeit aufgenommen worden ist.

Vergleicht man aber die zu erwartenden Kurven mit den tatsächlich bestimmten Diffusionsstrecken, so liegen bei beiden Messreihen die Punkte deutlich über den Kurven. Woher diese große Abweichung kommt, soll in Abschnitt 5 betrachtet werden.

5. Diskussion

Unser bestimmter Wert für die Diffusionskonstante weicht vom Literaturwert $D = 4 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ um 31 % ab. Diese hohe Abweichung sowie die Abweichung der Konzentrationsprofile von den theoretisch vorhergesagten Kurven lässt sich auf viele Ungenauigkeiten im Versuchsaufbau zurückführen.

Da der Versuch feinste Lichtunterschiede erfassen soll, reagieren die Messwerte sehr empfindlich auf äußere Lichteinflüsse. Da der Praktikumsraum während der Durchführung nicht abgedunkelt war, wirkt sich der Wolkenstand auf die Ergebnisse aus. Aber auch das Vorbeigehen einer Person am Versuchsaufbau oder die Körperhaltung der Praktikanten verändern die Lichtverhältnisse. So lassen sich einige der größeren Abweichungen in der Messwertkurve direkt darauf zurückführen, dass die Praktikanten die Plätze gewechselt haben.

Außerdem gibt es noch andere Faktoren, die zur Ungenauigkeit der Ergebnisse beitragen. So sind die verwendeten Graufilter sehr alt und verschmutzt, die Eichung auf eine Konzentration also sehr ungenau. Auch das analoge Ampèremeter folgte nicht glatt den Veränderungen in der Küvette, sondern wechselte teilweise ruckartig die Anzeige. Zudem unterschieden sich die Nullpunkte bei den zwei Skalenooptionen

fein und *grob*. So zeigte das Messgerät zwar bei der Einstellung *fein* genau auf die Null, wechselte jedoch bei der Einstellung *grob* auf einen anderen Wert.

Des Weiteren kommt es schon beim Einfüllen des Methylenblaus in die Küvette zu einer geringen Vermischung, so dass nicht von einem einheitlich vertikalen Konzentrationsgefälle ausgegangen werden kann.

Mit einigen einfachen Veränderungen ließen sich also die Messwerte deutlich verbessern. Das Abdunkeln des Raums, das Verwenden genauerer Ampèremeter und das Erneuern der Graufilter wären geeignete Maßnahmen dazu.

Auch sollten die Praktikanten darauf achten, dass sich beim Ablesen der Höhe keine zu großen Veränderungen bei der Strommessung ergeben, da sonst bei der nächsten Höhenanpassung möglicherweise zu viel nachreguliert wird und es so zu größeren Sprüngen in der Messreihe kommt.

A. Tabellen und Grafiken

t [min]	x [mm]	t [min]	x [mm]	t [min]	x [mm]	t [min]	x [mm]
0	53	8	97	16	136	24	174
0,5	42	8,5	99,5	16,5	140	24,5	178,5
1	46	9	103	17	142,5	25	178,5
1,5	50	9,5	106	17,5	143,5	25,5	179
2	55	10	108	18	147	26	182
2,5	58	10,5	114	18,5	151	26,5	182
3	62	11	116	19	153	27	185,5
3,5	68	11,5	117	19,5	153,5	27,5	188
4	69	12	120	20	156	28	191
4,5	75	12,5	123	20,5	159	28,5	194
5	78	13	123	21	161	29	194
5,5	81	13,5	126	21,5	164	29,5	195
6	83,5	14	124	22	166	30	197
6,5	87	14,5	127	22,5	164		
7	90,5	15	130,5	23	167,5		
7,5	94,5	15,5	133	23,5	171		

Tabelle A: Messreihe 1

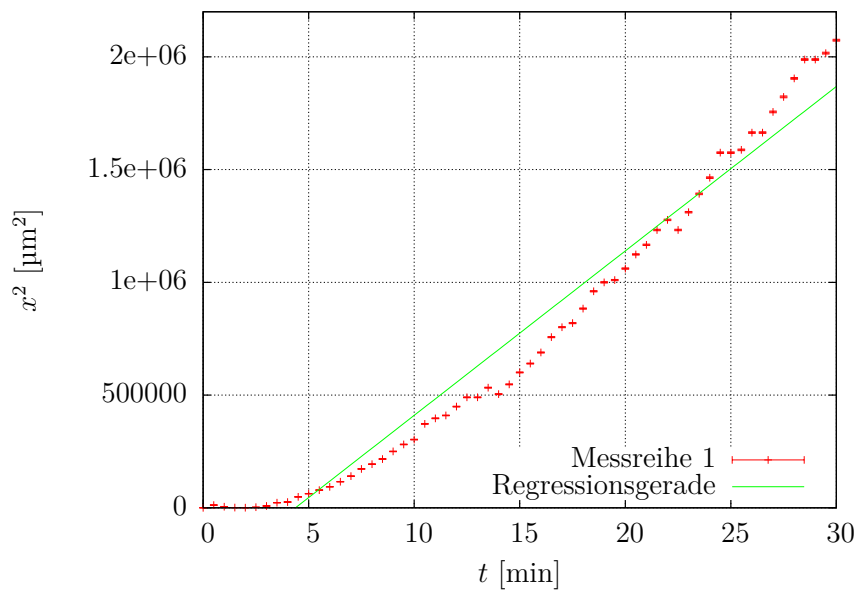


Abbildung A: Messreihe 1

A. TABELLEN UND GRAFIKEN

t [min]	h [mm]	t [min]	h [mm]	t [min]	h [mm]	t [min]	h [mm]
0	82	8	149,5	16	197	24	246
0,5	74,5	8,5	150	16,5	203	24,5	253
1	88,5	9	151,5	17	203	25	253
1,5	90	9,5	158	17,5	204	25,5	241
2	97	10	158	18	204	26	246
2,5	104,5	10,5	168	18,5	214	26,5	256,5
3	108	11	168	19	220	27	250
3,5	109,5	11,5	168	19,5	220	27,5	263
4	115	12	174	20	220	28	260,5
4,5	115	12,5	174	20,5	226	28,5	266
5	117,5	13	178	21	230	29	267,5
5,5	126	13,5	182	21,5	233	29,5	272
6	126	14	183	22	237	30	287
6,5	132	14,5	190	22,5	240		
7	140,5	15	192	23	243		
7,5	144	15,5	195	23,5	246		

Tabelle B: Messreihe 2

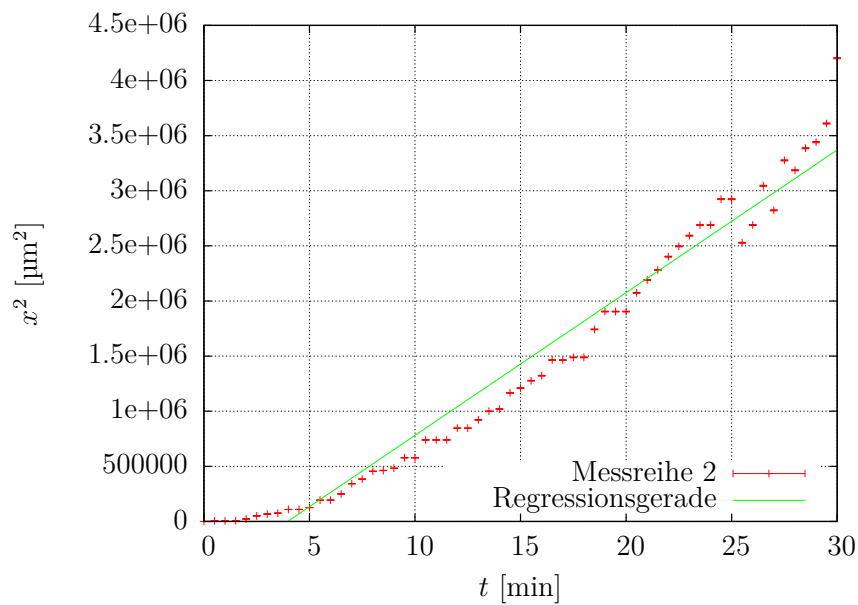


Abbildung B: Messreihe 2

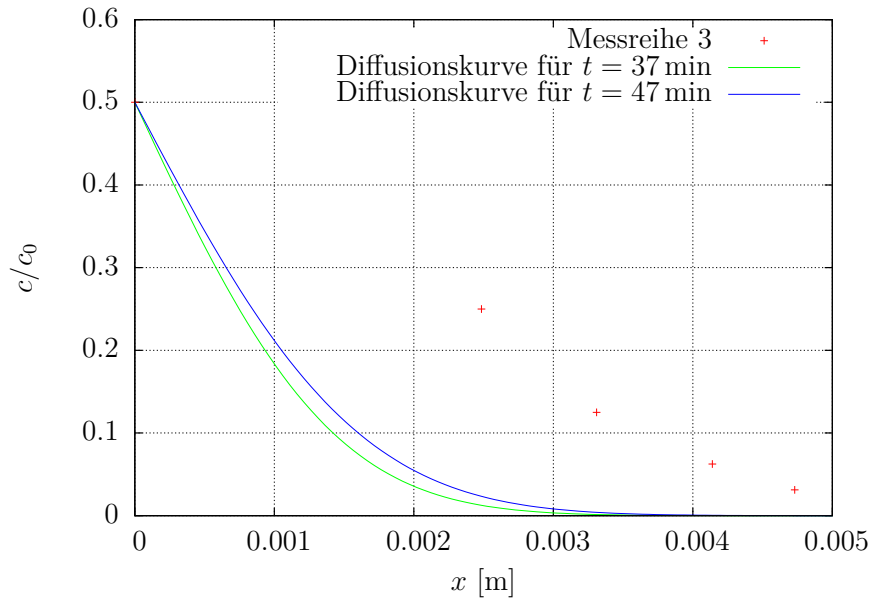


Abbildung C: Messreihe 3

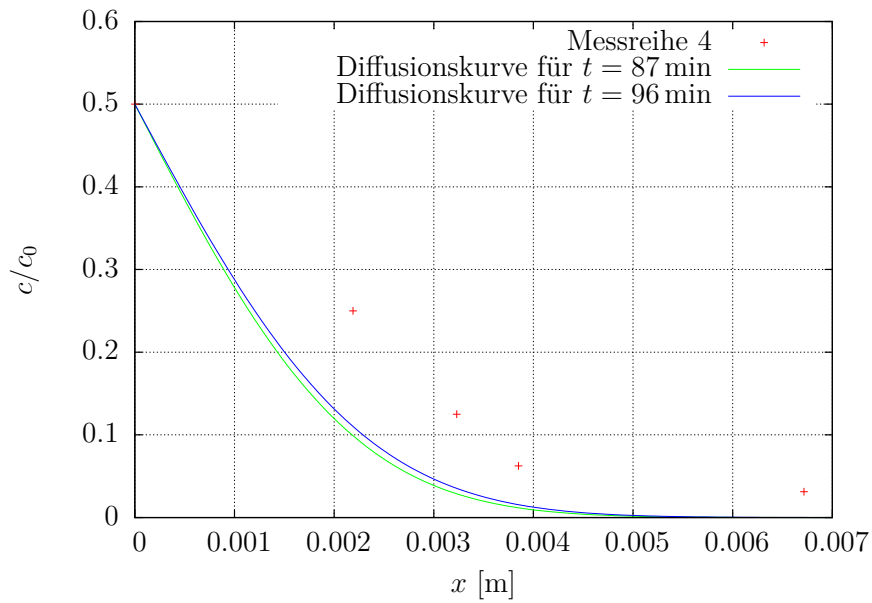


Abbildung D: Messreihe 4