Grundpraktikum der Fakultät für Physik
Georg–August–Universität Göttingen

Versuch 6
Spezifische Wärme der Luft und Gasthermometer

Praktikant:	Joscha Knolle
	Ole Schumann
E-Mail:	joscha@htilde.de

Durchgeführt am:	09.07.2012
Abgabe:	16.07.2012

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In diesem Versuch wollen wir sowohl den absoluten Nullpunkt bestimmen als auch die Freiheitsgrade der Luft und dessen spezifische Wärmekapazität. Dabei wollen wir ideale Gase beschreiben und die Zusammenhänge zwischen Druck, Temperatur und Volumen charakterisieren.

2. Theorie

2.1. Thermische Zustandsgleichung idealer Gase

Die thermische Zustandsgleichung idealer Gase ist ein experimentell gefundener Zusammenhang zwischen den thermodynamischen Zustandsgrößen Temperatur T, Druck p und Volumen V.Diese setzt sich aus den Gesetzen von BOYLE-MARIOTTE, GAY-LUSSAC und dem Gesetz von AMONTONS zusammen. Darin werden die Zusammenhänge

$$p \propto \frac{1}{V}, \quad V \propto T \quad \text{und} \quad p \propto T \tag{1}$$

beschrieben. Des weiteren wird für ideale Gase angenommen, dass die Dichte in jedem Teilvolumen gleich ist und so die Teilchenzahl N proportional zum Volumen V ist.

Setzt man diese Gleichungen nun zusammen, erhält man

$$p \cdot V \propto n \cdot T. \tag{2}$$

Die Proportionalitätskonstante ist die so genannte BOLTZMANN-KONSTANTE k_B. Alternativ zu der Teilchenzahl N kann man die Gleichung auch mit der Stoffmenge n formulieren. Dann ist der Proportionalitätsfaktor durch die UNIVERSELLE GASKONSTANTE R gegeben:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T. \tag{3}$$

Eine genauere Herleitung dieser Gleichung ist in [GER, S. 200] beschrieben.

2.2. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik beschreibt im wesentlichen die Energieerhaltung. Jedem System wird eine innere Energie U zugeordnet, welche sich nur durch den Transport von Energie in Form von Arbeit W oder Wärme Q über die Grenze des Systems ändern kann. Mathematisch lässt sich dies durch

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W \tag{4}$$

beschreiben. Hierbei sollen die δ darauf hinweisen, dass es sich um Prozessgrößen und nicht um Zustandsgrößen handelt.

Das Hinzuführen einer bestimmten Wärmemenge ΔQ bewirkt bei verschiedenen Körpern eine unterschiedliche Erhöhung der Temperatur. Hier gilt $\Delta Q = C \cdot \Delta T$, wobei die Konstante C noch davon abhängig ist, auf welche Art die Wärmezufuhr stattfindet: Bei einer isochoren Erwärmung (also bei konstantem Volumen) wird die Konstante c_V verwendet, wobei hier noch durch die Masse geteilt wird. Bei einer isobaren Erwärmung (konstanter Druck) wird als Konstante c_p verwendet.

Damit lässt sich Hauptsatz auch so formulieren [GER]:

$$\delta Q = \mathrm{d}U - \delta W = c_V n \mathrm{d}T + p \mathrm{d}V. \tag{5}$$

Die innere Energie U des Systems hängt von den Freiheitsgraden f des Gases ab und ist durch

$$U = \frac{f}{2} n k_B T = \frac{f}{2} R T = c_V n T \tag{6}$$

gegeben. Hierbei haben wir verwendet, dass die Wärmekapazität c_V mit den Freiheitsgraden über

$$c_V = \frac{f}{2} R \tag{7}$$

verknüpft ist.

3. Materialien und Methoden

3.1. Freiheitsgrade der Luft und Energie in einem Plattenkondensator

Im Folgenden wollen wir den in der Theorie verwendeten Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität c_V und der Anzahl der Freiheitsgrade herleiten.

Dazu differenzieren wir die ideale Gasgleichung und erhalten:

$$n \mathrm{d}T = \frac{V \mathrm{d}p + p \mathrm{d}V}{R}. \tag{8}$$

Setzt man dies nun in den ersten Hauptsatz der Thermodynamik ein, so folgt:

$$\mathrm{d}Q = c_V \frac{V\mathrm{d}p + p\mathrm{d}V}{R} + p\mathrm{d}V. \tag{9}$$

Löst man dies nun nach c_V/R auf, so ergibt sich die Formel:

$$\frac{\mathrm{d}Q - p\mathrm{d}V}{V\mathrm{d}p + p\mathrm{d}V} = \frac{c_V}{R} = \frac{f}{2}. \tag{10}$$

Außerdem wollen wir noch die gespeicherte Energie in einem Plattenkondensator bestimmen. Generell gilt für die Energie W:

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}. \tag{11}$$

In unserem Fall ist die Kraft $\vec{F}$ durch das elektrische Feld $\vec{E}$ multipliziert mit der auf den Kondensator gebrachten Ladung Q gegeben. Für einen idealisierten Plattenkondensator mit Plattenabstand d und Spannung U gilt $E = U/d$. Dann folgt

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int Q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int Q\mathrm{d}U = \int CU\mathrm{d}U = \frac{1}{2}CU^2, \tag{12}$$

wobei C die Kapazität des Kondensators ist.

3.2. Der Versuchsaufbau

Im ersten Versuchsteil werden mit Hilfe eines Gasthermometers gleichzeitig der Druck und die Temperatur in einem Glaskolben gemessen, wobei das Volumen konstant gehalten wird.

Der Versuchsaufbau besteht, wie in Abbildung 1 schematisch dargestellt, aus einem gläsernen Gasbehälter, dessen Innendruck mit einem Druckmessgerät gemessen werden kann. Das Messgerät misst die Differenz von Innendruck und Außendruck. Die Temperatur des eingeschlossenen Gases wird mit Hilfe von Wasser, das den Glaskolben umgibt, reguliert. Das Wasser kann durch Zugabe von Eiswürfeln abgekühlt und durch eine Heizplatte aufgewärmt werden. Das Gas nimmt aufgrund der geringen Wärmekapazität relativ schnell die Temperatur des Wassers an, weshalb zur Bestimmung der Gastemperatur nur die Temperatur der Wasser herangezogen wird, welche mit einem einfachen Thermometer bestimmt wird.

Im zweiten Teil wird einem Gasvolumen eine bestimmte Wärmemenge zugeführt und die so entstehende Druckzunahme gemessen. Dies geschieht über einen Heizdraht der sich in einem mit Luft gefüllten Zylinder befindet. Über den Draht wird ein Kondensator entladen, dessen angelegte Spannung eingestellt werden kann. Für die Druckmessung ist an den Glaszylinder ein Wassermanometer angeschlossen. Der Versuch ist schematisch in Abbildung 2 dargestellt.

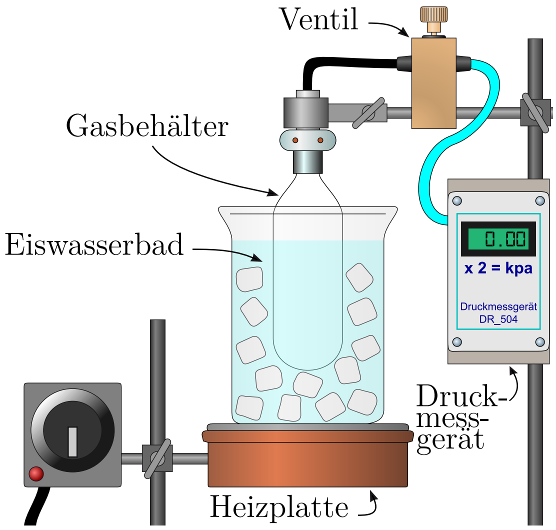

Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Jolly-schen Luftthermometers [LP]

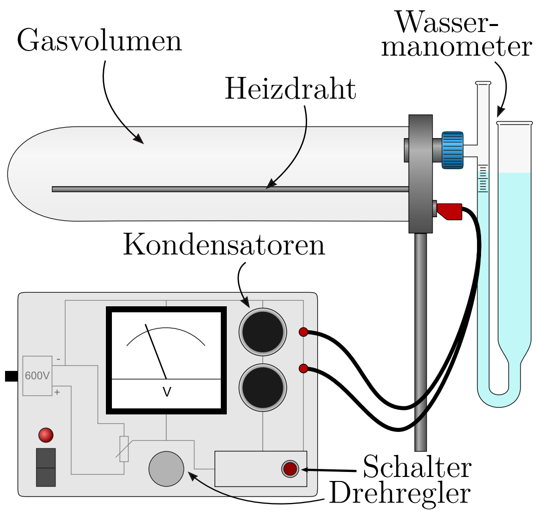

Abbildung 2: Schematischer Aufbau des zweiten Versuchs [LP]

4. Durchführung

In dem ersten Teil wird für verschiedene Gastemperaturen der Druck gemessen. Dazu wird zuerst das Ventil geöffnet, damit Innen- und Außendruck übereinstimmen. Der Umgebungsdruck wird notiert und als Referenzgröße verwendet. Nun wird der Glaskolben mit Eiswasser auf 0 °C herabgekühlt und das Ventil geschlossen. Unter ständigem Rühren des Wassers wird nun der Kolben erhitzt und der Druck p im Kolben alle 2 °C abgelesen. Erreicht das den Kolben umgebende Wasser eine Temperatur von 100 °C, so wird durch Zugabe von Eis der Kolben wieder auf 0 °C abgekühlt und erneut der Druck p alle 2 °C abgelesen.

Im zweiten Teil wird mittels eines Kondensators eine gewisse Wärmemenge an das Gas abgegeben. Die Kondensatorspannung wird mit dem Drehregler eingestellt. Durch Drücken des Schalters wird der Kondensator über den Heizdraht entladen. Da sich das Gasvolumen schnell wieder abkühlt muss der maximale Ausschlag des Manometers schnell abgelesen werden. Dabei wird die Spannung gleichmäßig von 120 V auf 500 V in 50 V Schritten gesteigert. Pro Spannung werden drei Entladungen gemessen. Das Innenvolumen des Zylinders wird ebenfalls vermessen.

5. Auswertung

5.1. Bestimmung des absoluten Nullpunkts

Die Messdaten des ersten Versuchs sind im Anhang in Tabelle A gegeben. Auf Grund des in Gleichung (3) dargestellten Zusammenhangs zwischen dem Druck p und der Temperatur T erwartet man in einem $p-T$-Plot eine Gerade.

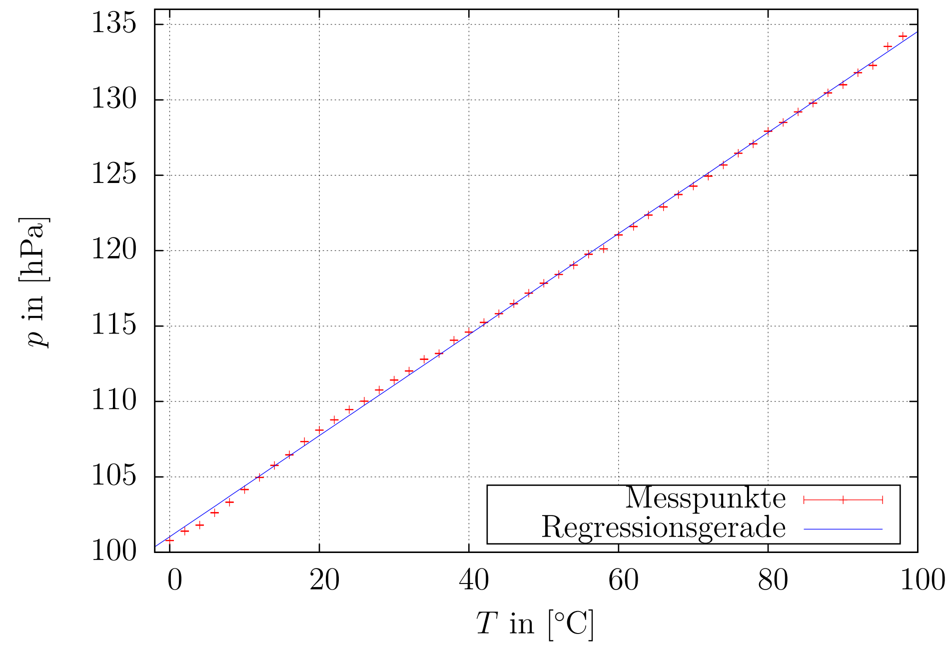

Abbildung 3: Messwerte des Aufwärmvorgangs

In den Abbildungen 3 und 4 sind für die Messreihen des Aufwärmens bzw. Abkühlens des Kolbens sowohl die Messpunkte als auch ein χ^2-Fit aufgetragen.

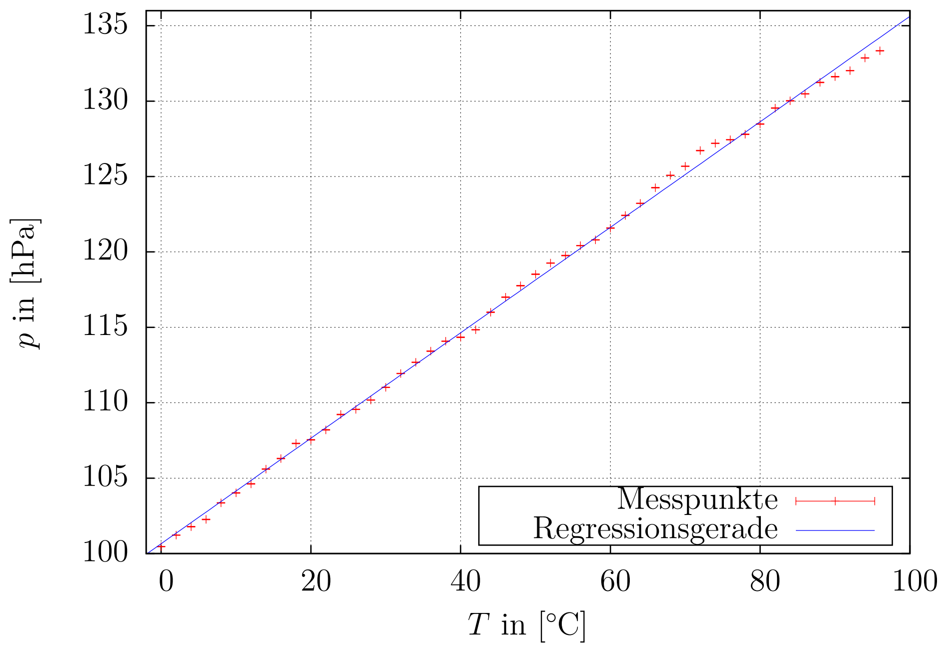

Abbildung 4: Messwerte des Abkühlvorgangs

Um den absoluten Nullpunkt N_{abs} zu bestimmen, wird nun die Nullstelle des Fits bestimmt. Umstellen der Geradengleichung liefert

$$N_{\text{abs}} = -\frac{b}{m}, \tag{13}$$

wobei m die Steigung der Geraden und b der y-Achsenabschnitt ist. Der Fehler berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (Gleichung (d)) zu

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{\sigma_b^2}{m^2} + \frac{b^2 \sigma_m^2}{m^4}}. \tag{14}$$

Die Fehler σ_m und σ_b wurden von `gnuplot` übernommen.

In Tabelle 1 sind die in gefunden Werte für m, b und der daraus berechnete Nullpunkt für beide Messreihen eingetragen.

Das gewichtete Mittel aus den beiden Werten für den Nullpunkt ergibt sich nach Gleichung (b) zu

$$\overline{N_{\text{abs}}} = (-297{,}1 \pm 0{,}9)\,°\text{C}, \tag{15}$$

wobei der Fehler nach Gleichung (c) berechnet wurde.

Aufwärmen

m	$(0{,}3350 \pm 0{,}0012)\,\mathrm{hPa/°C}$
b	$(101{,}03 \pm 0{,}07)\,\mathrm{hPa}$
Nullpunkt	$(-301{,}6 \pm 1{,}1)\,\mathrm{°C}$

Abkühlen

m	$(0{,}3497 \pm 0{,}0019)\,\mathrm{hPa/°C}$
b	$(100{,}65 \pm 0{,}11)\,\mathrm{hPa}$
Nullpunkt	$(-287{,}8 \pm 1{,}6)\,\mathrm{°C}$

Tabelle 1: Ergebnis der ersten Messreihe

5.2. Spezifische Wärme der Luft

Nun wollen wir die spezifische Wärmekapazität und die Freiheitsgrade der Luft aus dem zweiten Versuch bestimmen. Aus Gleichung (12) wissen wir, dass die an die Luft abgegebene Wärme proportional zum Quadrat der eingestellten Spannung ist.

Die Kapazität C des verwendeten Kondensators ist mit $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ angegeben. Aus den eingestellten Spannungen lassen sich dadurch die abgegebenen Wärmemengen bestimmen. Den Fehler beim Einstellen der Spannung haben wir mit $5\,\mathrm{V}$ angenommen. Dadurch ergibt sich ein Fehler bei der zugeführten Wärmemenge von

$$\sigma_{\Delta Q} = UC\sigma_U. \tag{16}$$

Das Volumen des Zylinders haben wir über die Formel $V = \frac{\pi}{4}d^2h$ berechnet und die Höhe zu $h = (40{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ und den Durchmesser zu $d = (9{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{cm}$ vermessen. Demnach beträgt das Volumen des Zylinders $V = (2{,}54 \pm 0{,}06) \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Die drei pro Entladung gemessenen Höhen haben wir gemittelt, wobei hier das gewichtete und arithmetische Mittel identisch sind, da wir die Fehler alle mit einem Skalenteil, also $2\,\mathrm{mm}$, angenommen haben. Wir haben diesen Fehler angenommen, da die Schwankungen der Höhe relativ groß waren und so ein Ablesen nur auf einen Skalenteil genau möglich war. Demnach bezeichnet nun

$$h = \sum_{i=1}^{3} h_i \tag{17}$$

die gemittelte Höhe mit dem Fehler $\sigma_h = 2/\sqrt{3}$.

Die Änderung des Volumens kann nun über

$$\Delta V = \pi h r_i^2 \tag{18}$$

berechnet werden. Der Fehler beträgt

$$\sigma_{\Delta_V} = \pi \sigma_h r_1^2, \tag{19}$$

wobei r_1 der Radius des kleineren Glasrohres ist, an dem wir den Höhenunterschied abgelesen haben. Laut den Angaben am Versuch gilt $r_1 = 2\,\mathrm{mm}$ und $r_2 = 9\,\mathrm{mm}$, wobei wir diese Werte als exakt angenommen haben.

Da der Volumenunterschied in beiden Glasröhren gleich ist, gilt

$$h_1 r_1^2 = h_2 r_2^2, \tag{20}$$

mit der gemessenen Höhe h_1 im kleinen Rohr und der nicht gemessenen Höhe h_2 im größeren Rohr. Der Höhenunterschied ergibt sich dann über

$$\Delta h = h_1 + h_2 = h_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \tag{21}$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{\Delta h} = \sigma_h \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right). \tag{22}$$

Die Druckänderung, die wir letztendlich untersuchen möchten, ergibt sich nun zu

$$\Delta p = \rho g \Delta h. \tag{23}$$

Die Dichte ρ von Wasser wurde mit $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ angenommen. Der Fehler der Druckänderung Δp ergibt sich durch

$$\sigma_{\Delta p} = \rho g \sigma_h. \tag{24}$$

In Abbildung 5 ist der Zusammenhang zwischen der zugeführten Wärmemenge ΔQ und der Druckänderung Δp aufgetragen. Dabei sind die roten Kreuze unsere Messwerte und die blaue Gerade ein χ^2-Fit, der von `gnuplot` erstellt wurde.

Nun haben wir auch alle nötigen Größen bestimmt um mit Hilfe von Gleichung (10) die Freiheitsgrade der Luft zu bestimmen:

$$f = 2\frac{\Delta Q - p\Delta V}{V\Delta p + p\Delta V}. \tag{25}$$

Der Fehler lässt sich leicht zu

$$\sigma_f = \left[\left(\frac{\sigma_{\Delta Q}}{V\Delta p + p\Delta V}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta Q - p\Delta V)\Delta p \sigma_V}{(V\Delta p + p\Delta V)^2}\right)^2 + \left(\frac{(\Delta Q - p\Delta V) V \sigma_{\Delta p}}{(V\Delta p + p\Delta V)^2}\right)^2 + \left(\frac{p\sigma_{\Delta V}(\Delta Q + V\Delta p)}{(V\Delta p + p\Delta V)^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

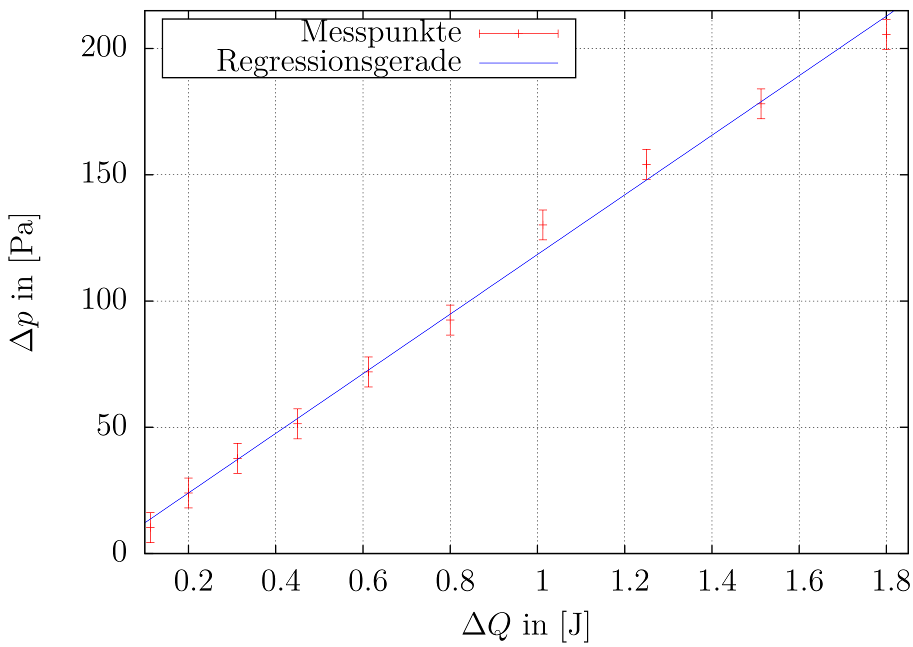

Abbildung 5: Druckänderung gegen zugeführter Wärme

berechnen. Im Anhang in Tabelle B sind sowohl die gemessenen Höhen für die drei Messreihen als auch die daraus berechneten Freiheitsgrade angegeben. Aus diesen Werten kann man nun mit Hilfe des gewichteten Mittels (vgl. Gleichung (b)) einen Bestwert $\overline{f}$ finden:

$$\overline{f} = 3{,}11 \pm 0{,}08. \tag{27}$$

Nach Gleichung (10) gilt ebenfalls

$$c_V = \frac{1}{2} R f, \tag{28}$$

wodurch sich die Wärmekapazität zu

$$c_V = (12{,}9 \pm 0{,}3)\,\mathrm{J/(mol\,K)} \tag{29}$$

berechnet. Der Fehler wurde über

$$\sigma_{c_V} = \frac{1}{2} R \sigma_f \tag{30}$$

bestimmt.

6. Diskussion

Im ersten Versuchsteil konnten wir den Nullpunkt auf $(-297{,}1 \pm 0{,}9)\,°\mathrm{C}$ bestimmen, was einer Abweichung vom Literaturwert ($-273{,}15\,°\mathrm{C}$, [ERB]) von rund

9 % entspricht. Angesichts des relativ einfachen Versuchsaufbaus ist dieser Wert durchaus gut. Zudem haben wir zur Bestimmung des Wertes das ideale Gasgesetz verwendet, was nur in erster Näherung für Luft korrekt ist. Die Verwendung der *Van-der-Waals-Gleichung* (vgl. auch Versuch 8, Dampfdruck von Wasser) könnte hier eine Verbesserung des Messwertes bewirken.

Zudem kann man in der Abkühlkurve deutliche „Knicke“ erkennen (vgl. Abbildung 4). Diese kommen wahrscheinlich dadurch zu Stande, dass das Abkühlen immer nur stückweise geschehen konnte, da das Behältnis zu voll war und immer wieder Wasser abgegossen werden musste. Hier wäre es gut, wenn es eine einfache Möglichkeit gäbe, nach dem Erhitzen das Wasser im Glas zu tauschen, durch kälteres zu ersetzen und den Behälter von der Platte zu nehmen, so dass der Versuch beschleunigt wird und man nicht entgegen der noch warmen Heizplatte versucht zu kühlen.

Im zweiten Teil konnten wir für die Freiheitsgrade der Luft leider nur einen Wert von ca. drei Freiheitsgraden finden. Von dem Literaturwert von fünf Freiheitsgraden weicht dies leider noch deutlich ab. Da wir aus diesem Wert auch die spezifische Wärmekapazität berechnet haben, ist es wenig erstaunlich, dass auch dieser Wert von dem Literaturwert von 20,795 J mol/K um etwa 38 % abweicht. Mögliche Fehlerquellen sind hier die nicht gut einzustellende Kondensatorspannung, welche immer leicht um den eingestellten Wert schwankte und sich aufgrund der relativ groben Skala und möglichen Paralaxefehlern nicht in dem Maße beeinflussen ließ, wie es bei einer so empfindlichen Messung wünschenswert wäre.

A. Messwerte und Tabellen

Temperatur in °C	Druck in [0,5 kPa] aufwärmen	abkühlen	Temperatur in °C	Druck in [0,5 kPa] aufwärmen	abkühlen
0	0,00	−0,16	50	8,53	8,87
2	0,31	0,22	52	8,82	9,24
4	0,51	0,50	54	9,13	9,49
6	0,92	0,74	56	9,49	9,82
8	1,27	1,29	58	9,67	10,01
10	1,69	1,62	60	10,13	10,40
12	2,09	1,92	62	10,41	10,82
14	2,49	2,41	64	10,79	11,22
16	2,84	2,76	66	11,06	11,74
18	3,28	3,26	68	11,47	12,15
20	3,66	3,38	70	11,75	12,45
22	4,00	3,71	72	12,08	12,97
24	4,34	4,22	74	12,45	13,21
26	4,62	4,39	76	12,84	13,33
28	4,99	4,70	78	13,15	13,51
30	5,32	5,12	80	13,57	13,85
32	5,62	5,58	82	13,86	14,38
34	6,01	5,95	84	14,21	14,62
36	6,20	6,32	86	14,50	14,85
38	6,64	6,65	88	14,84	15,23
40	6,91	6,78	90	15,11	15,42
42	7,23	7,03	92	15,51	15,62
44	7,52	7,61	94	15,75	16,04
46	7,85	8,11	96	16,38	16,28
48	8,20	8,49	98	16,72	–

Tabelle A: Messwerte des ersten Versuchs

Spannung in [V]	Höhenunterschied in [mm]			Freiheitsgrade f
150	1 ± 1	$0,5 \pm 1,0$	$1,5 \pm 1,0$	$4,1 \pm 1,1$
200	2 ± 1	2 ± 1	3 ± 1	$3,1 \pm 0,4$
250	3 ± 1	4 ± 1	4 ± 1	$3,1 \pm 0,4$
300	4 ± 1	5 ± 1	6 ± 1	$3,2 \pm 0,3$
350	6 ± 1	7 ± 1	8 ± 1	$3,2 \pm 0,2$
400	8 ± 1	9 ± 1	10 ± 1	$3,2 \pm 0,2$
450	11 ± 1	12 ± 1	15 ± 1	$2,9 \pm 0,2$
500	14 ± 1	14 ± 1	17 ± 1	$3,0 \pm 0,2$
550	16 ± 1	17 ± 1	19 ± 1	$3,1 \pm 0,2$
600	19 ± 1	21 ± 1	20 ± 1	$3,2 \pm 0,2$

Tabelle B: Messwerte des zweiten Versuchs

B. Formelsammlung

Berechnung des Mittelwertes $\overline{M}$ aus n Messwerten M_i:

$$\overline{M} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i. \tag{a}$$

Berechnung des gewichteten Mittelwertes $\overline{x}$ aus n Messwerten x_i mit Fehler σ_i:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{b}$$

Fehler des gewichteten Mittelwerts:

$$\sigma_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \tag{c}$$

Fehlerfortpflanzungsgesetz einer Funktion f mit den Komponenten x_i:

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{d}$$

C. Literaturverzeichnis

[ERB] Erbrecht, Rüdiger. *Das große Tafelwerk: Formelsammlung* Erste Auflage. Cornelsen, 2003.

[GER] Meschede, Dieter. *Gerthsen Physik.* Dreiundzwanzigste Auflage. Berlin, Heidelberg, 2006.

[LP] Lehrportal Physik. *Kreiselpräzession.* Online im Internet: `http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3643`, abgerufen am 8.07.12, 20:00 Uhr.

[TIP] Tipler, Paul A. und Mosca, Gene. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure* Sechste Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.