

Versuch 4

Kreiselpräzession

Praktikant: Joscha Knolle
E-Mail: joscha@htilde.de
Mitarbeiter: Ole Schumann
Durchgeführt am: 25.06.2012
Abgabe: 09.07.2012

Note:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Theorie	2
2.1. Rotation	2
2.2. Präzession	3
2.3. Nutation	4
3. Materialien und Methoden	4
3.1. Versuchsaufbau	4
3.2. Trägheitsmomente	6
3.3. Präzessions- und Nutationsfrequenz	7
4. Durchführung	7
4.1. Physikalisches Pendel	7
4.2. Kreiselpräzession	8
4.3. Kreiselnutation	8
5. Auswertung	8
5.1. Trägheitsmoment aus Versuchsparametern	8
5.2. Trägheitsmoment aus physikalischem Pendel	9
5.3. Trägheitsmoment aus Präzession	9
5.4. Nutationsfrequenz	11
6. Diskussion	11
6.1. Vergleich der Trägheitsmomente	11
6.2. Nutation	12
6.3. Verbesserungsvorschläge	13
A. Messwerte	I
B. Formelsammlung	III
C. Abbildungen	IV
D. Literatur	VII

1. Einleitung

Schneidet man einen von zwei Fäden, an denen die Drehachse eines rotierenden Rades aufgehängt ist, durch, behält das Rad seine aufrechte Stellung bei und dreht sich senkrecht zur Rotationsebene. Dieses Phänomen wird als *Präzession* bezeichnet und resultiert aus der Drehimpulserhaltung.

Präzession kann man auch bei einem Spielzeugkreisel, der in Drehung versetzt wurde, beobachten, wenn zusätzlich zur *Rotation* um seine Symmetrieachse diese Drehachse eine Kreisbahn um den Kreisel herum beschreibt. Bewegt sich die Spitze zusätzlich stoßartig hin- und her, so spricht man von *Nutation*. Schematisch ist dies in Abbildung 1 dargestellt.

In diesem Versuch werden an einem physikalischen Kreisel diese drei unterschiedlichen Drehbewegungen untersucht, indem die jeweiligen Frequenzen gemessen und ihre Zusammenhänge betrachtet werden.

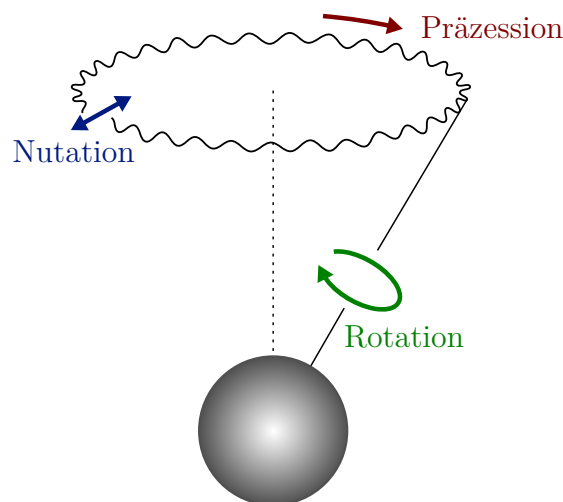


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Kreiselbewegungen

2. Theorie

2.1. Rotation

Im physikalischen Sinne bezeichnet man als Kreisel einen starren Körper, der sich um eine Achse dreht und in einem Punkt festgehalten wird. Betrachtet werden nun Kreisel, die symmetrisch bezüglich ihrer Drehachse sind. Dazu verwendet man zum Beispiel ein Rad, das in seinem Massenschwerpunkt auf einer Achse angebracht ist.

Die Rotation um die Symmetrieachse, die als Figurenachse bezeichnet wird, lässt sich nach [TIP, S. 290] beschreiben durch

$$\vec{L} = I_x \vec{\omega}_R \quad (1)$$

mit dem Drehimpuls \vec{L} , dem Trägheitsmoment I_x und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_R$.

2.2. Präzession

Nun betrachtet man den Fall, dass die momentane Drehachse des Kreisels von der vertikalen Drehachse um einen Winkel θ abweicht und ein im Betrag konstantes Drehmoment \vec{D} senkrecht zum Drehimpuls \vec{L} auf den Kiesel ausgeübt wird. Der Drehimpuls wird also der Richtung des Drehmoments folgen, ohne dass sich dabei sein Betrag ändert.

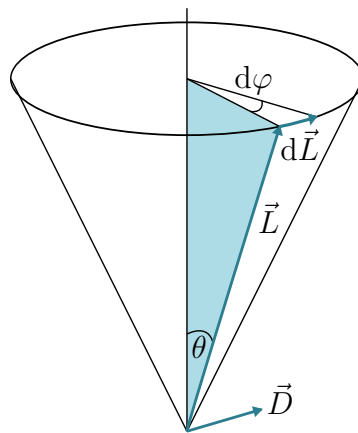


Abbildung 2: Infinitesimale Änderung des Drehimpulses [GER, S. 90]

Erfährt der Drehimpuls in der Zeit dt eine senkrechte Änderung $d\vec{L} = \vec{D}dt$, so dreht sich \vec{L} dadurch um den Winkel $d\varphi$. Betrachtet man Abbildung 2, dann ist $L \sin \theta$ der Radius des Kreises, auf dem sich die Spitze des als Vektorpfeils interpretierten Drehimpulses bewegt. Nach [GER, S. 89] folgt dann

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{Ddt}{L \sin \theta}. \quad (2)$$

Damit folgt für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Präzession

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{L \sin \theta}. \quad (3)$$

Vergleicht man dies mit Gleichung (1), so sieht man, dass mit höherer Rotationsgeschwindigkeit die Präzessionsgeschwindigkeit sinkt.

2.3. Nutation

Übt man nun auf den rotierenden Kreisel einen Impuls senkrecht zur Rotationsachse aus, fällt die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ nicht mehr mit der Figurenachse zusammen. Dadurch wirkt ein Zentrifugalmoment auf die Figurenachse, sie bewegt sich also auf einem Kegelmantel, der als Nutationskegel bezeichnet wird. Die momentane Drehachse des Kreisels bewegt sich dann ebenfalls um einen Kegel, den man als Rastpolkegel bezeichnet. In der Mitte des Nutations- und Rastpolkegels liegt die Impulsachse. Die Situation ist in Abbildung 3 dargestellt.

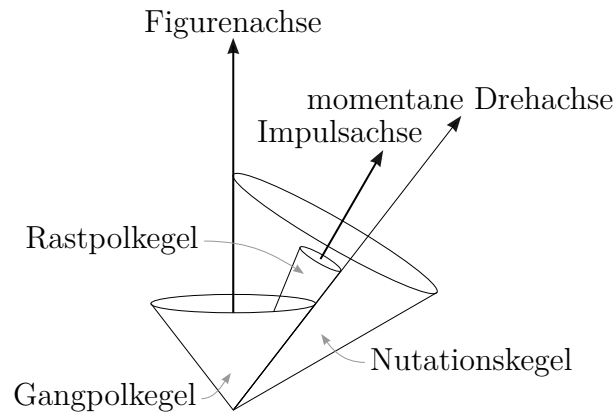


Abbildung 3: Kegelflächen der Nutationsbewegung [LP]

Man kann dies ebenfalls so interpretieren, dass sich der Rastpolkegel auf einem Kegelmantel um die Figurenachse abrollt, der als Gangpolkegel bezeichnet wird. Tatsächlich beobachten kann man nur die Bewegung der Figurenachse auf dem Nutationskegel. Deren Geschwindigkeit berechnet sich nach [LAN, S. 139] näherungsweise für kleine Nutationswinkel zu

$$\vec{\omega}_N \approx \frac{\vec{L}}{I_z}, \quad (4)$$

wobei I_z das Trägheitsmoment bezüglich einer zur Rotationsachse senkrechten Achse ist.

3. Materialien und Methoden

3.1. Versuchsaufbau

Als Kreisel wird ein Rad verwendet, das zusammen mit einem Ausgleichsgewicht auf einer Stange montiert ist. Dabei ist das Rad so gelagert, dass es um seine Symmetrieachse rotieren kann. Im Schwerpunkt von Rad und Ausgleichsgewicht

wird die Stange unterstützt, sodass sie drehen und kippen kann. Die Unterstützung kann aber auch fixiert werden.

Auf dem Rad kann an zwei diametral gegenüberliegenden Stellen ein Pendelgewicht eingeschraubt werden. Mit Hilfe einer Schnur kann der Kreisel aufgezogen und so in schnelle Rotation versetzt werden. Auf der Stange gegenüber dem Rad können Zusatzgewichte angehängt werden. Die Massen und Abstände der einzelnen Bestandteile des Kreisels sind in Tabelle A aufgeführt. Eine Skizze des Versuchsaufbaus findet sich in Abbildung 4.

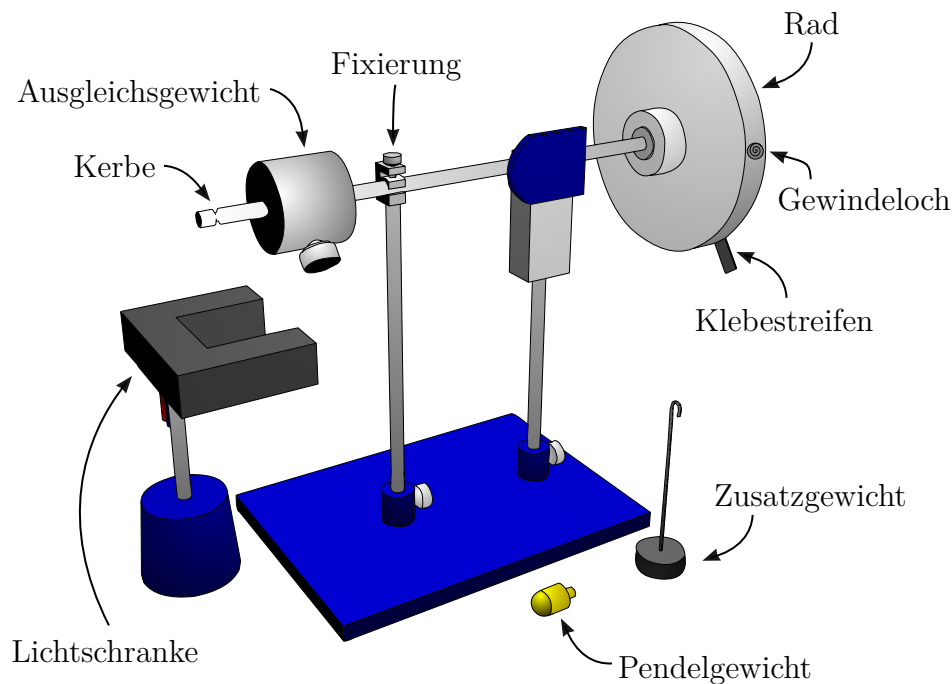


Abbildung 4: Versuchsaufbau [LP, bearbeitet vom Verfasser]

Zur Zeitmessung werden Stoppuhren und eine Lichtschranke eingesetzt. Der Fehler für eine Einzelmessung t der Stoppuhr berechnet sich nach [NPP, S. 7] zu

$$\sigma_t = 0,1 \text{ s} + 0,005 \cdot t. \quad (5)$$

Die Lichtschranke registriert Unterbrechungen eines Lichtstrahls, der zwischen den beiden Enden des U-förmig aufgebauten Geräts erzeugt wird. Nach dem Starten misst sie die Zeit zwischen zwei Unterbrechungen des Lichtstrahls. Um die Rotationsperiode des Kreisels messen zu können, ist ein schwarzer Klebestreifen auf dem Rad angebracht, der die Lichtschranke bei jedem Umlauf unterbricht. Für die Lichtschranke wird als Fehler $\sigma_t = 0,001 \text{ s}$, also eine Skaleneinheit, angenommen. Ebenso wird für das zur Längenmessung eingesetzte Lineal ein Fehler von $\sigma_x = 0,001 \text{ m}$ angesetzt.

3.2. Trägheitsmomente

Zunächst wird das polare Trägheitsmoment des Rades bezüglich seiner Figuren- achse betrachtet, das sich nach [GER, S. 74] berechnet zu

$$I_x = \frac{1}{2} m_R r_R^2 \quad (6)$$

mit der Masse m_R und dem Radius r_R . Zusätzlich soll es auch aus dem Ver- suchsaufbau bestimmt werden. Wird das Rad als physikalisches Pendel eingesetzt und misst man dessen Periodendauer T_R , so lässt sich daraus das Trägheitsmoment $I_x = I_{\text{Pendel}} - I'$ bestimmen, wobei I' für das Trägheitsmoment des Pendelgewichts steht. Das Trägheitsmoment des Pendels berechnet sich nach [BS, S. 168] zu

$$I_{\text{Pendel}} = \frac{T_R^2}{4\pi^2} M g s, \quad (7)$$

mit der Gesamtmasse $M = m_R + m_P$ und dem Abstand s zwischen Schwerpunkt und Drehachse des Pendels, der durch $s = a_P \frac{m_P}{m_R + m_P}$ gegeben ist. Das Trägheits- moment des Zusatzgewichtes ergibt sich mit dem Abstand a_P von Zusatzgewicht und Drehachse zu $I' = m_P a_P^2$. Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{T_R^2}{4\pi^2} (m_R + m_P) g a_P \frac{m_P}{m_R + m_P} - m_P a_P^2 \\ &= \left(\frac{T_R^2}{4\pi^2} g - a_P \right) a_P m_P. \end{aligned} \quad (8)$$

Außerdem betrachtet man das Trägheitsmoment des Kreisels bezüglich der Prä- zessionsachse, die vertikal zur Figuren- achse steht. Nach [HAR, S. 65] ergibt sich das äquatoriale Trägheitsmoment eines Zylinders mit Radius r und Dicke d zu

$$I = \frac{1}{4} m \left(r^2 + \frac{1}{3} d^2 \right). \quad (9)$$

Der Kreisel setzt sich aus dem Rad und dem Ausgleichsgewicht zusammen, die bei- de die Form eines Zylinders haben. Um das Trägheitsmoment dieser beiden Körper bezüglich der Präzessionsachse zu erhalten, muss man zum äquatorialen Trägheits- moment nach dem Satz von Steiner (vergleiche [NOL, S. 306]) den Korrekturterm ma^2 addieren. Dabei bezeichnet a den Abstand zwischen der Präzessionsachse und der äquatorialen Drehachse. Summiert ergibt sich das Trägheitsmoment des Kreisels damit zu

$$I_z = \underbrace{\frac{1}{4} m_R \left(r_R^2 + \frac{1}{3} d_R^2 + 4a_R^2 \right)}_{\text{Rad}} + \underbrace{\frac{1}{4} m_A \left(r_A^2 + \frac{1}{3} d_A^2 + 4a_A^2 \right)}_{\text{Ausgleichsgewicht}}, \quad (10)$$

wobei die Indizes R und A für die jeweiligen Eigenschaften des Rades beziehungsweise des Ausgleichsgewichts stehen. Mit den Hebelgesetzen gilt $a_R m_R = a_A m_A$ und somit vereinfacht sich das Trägheitsmoment zu

$$I_z = \frac{1}{4} m_R \left(r_R^2 + \frac{1}{3} d_R^2 + 4 \frac{m_A^2}{m_R^2} a_A^2 \right) + \frac{1}{4} m_A \left(r_A^2 + \frac{1}{3} d_A^2 + 4 a_A^2 \right). \quad (11)$$

3.3. Präzessions- und Nutationsfrequenz

In dem beschriebenen Versuchsaufbau werden die Präzessions- und die Nutationsbewegung jeweils durch die Gravitationskraft hervorgerufen. Die Kraft, die das Drehmoment hervorruft, ist also der zum Drehimpuls senkrechte Anteil der Gravitationskraft. Damit folgt

$$D = m g a \sin \theta \quad (12)$$

für das Drehmoment. Daraus und mit Gleichung (1) ergibt sich aus Gleichung (3) die Präzessionsfrequenz zu

$$\omega_P = \frac{D}{L \sin \theta} = \frac{m_{Pr} g a_{Pr}}{I_x \omega_R}. \quad (13)$$

Analog folgt aus Gleichung (4) für die Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{I_x}{I_z} \omega_R. \quad (14)$$

Als Erdbeschleunigung wird nach [NOL, S. 178] der Wert

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \quad (15)$$

verwendet.

4. Durchführung

4.1. Physikalisches Pendel

Als erste Messung wird der Kreisel als physikalisches Pendel untersucht, indem das Rad eingespannt, die Stange fixiert und das Pendelgewicht $m_P = 100 \text{ g}$ eingeschraubt wird. Mit der Stoppuhr wird viermal die Schwingungsdauer von zehn Perioden gemessen. Anschließend wird das Pendelgewicht an der gegenüberliegenden Stelle eingeschraubt und die Messung wiederholt.

4.2. Kreiselpräzession

Für die zweite Messung wird das Pendelgewicht wieder abgenommen und die Fixierung der Stange gelöst. Das Ausgleichsgewicht ist so zu verschieben, dass der Kreisel sich im horizontalen Gleichgewicht befindet. Der so erhaltene Abstand von dem Ausgleichsgewicht zum Unterstützungspunkt wird notiert. Um die Präzession des Kreisels zu untersuchen, wird der Kreisel mit der Aufzugsschnur zum Rotieren und durch das Anhängen verschiedener Zusatzgewichte zum Präzedieren gebracht. Verwendet werden als Zusatzgewichte die Massen 40 g, 60 g und 80 g.

Während der eine Praktikant den Kreisel aufzieht, hält der andere die Stange fest. Mit Hilfe der Lichtschranke wird dann die Periodendauer der Kreiselrotation gemessen, bevor der Kreisel losgelassen und mit der Stoppuhr mehrfach die Schwingungsdauer der halben Präzessionsperiode bestimmt wird. Nach jeder halben Präzessionsumdrehung wird außerdem wieder die Periodendauer der Rotation mit der Lichtschranke bestimmt. Dabei wird der Kreisel nicht angehalten. Dies wird mehrmals durchgeführt, bis für jedes Zusatzgewicht acht halbe Präzessionsperioden ausgemessen worden sind.

4.3. Kreiselnutation

Bei der dritten Messung wird die Nutation des Kreisels untersucht. Nach dem Aufziehen des Kreisels wird abwechselnd mit der Lichtschranke die Periodendauer der Rotation und mit der Stoppuhr die Schwingungsdauer von mehreren Perioden der Nutation gemessen. Um den Kreisel zur Nutation anzuregen, wird der Stange ein Stoß parallel zur Rotationsebene versetzt. Insgesamt wird so die Periodendauer der Kreiselnutation und jeweils die Periodendauer der Kreiselrotation vor und nach den Nutationen bestimmt, bis die Nutationsamplitude zu klein geworden ist, um sie messen zu können. Die Messung wird zweimal durchgeführt.

5. Auswertung

5.1. Trägheitsmoment aus Versuchsparametern

Mit den Daten aus Tabelle A berechnet sich das Trägheitsmoment bezüglich der horizontalen Achse nach Gleichung (6) zu

$$I_x = 9,93 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (16)$$

Ebenso berechnet man aus Gleichung (11) das Trägheitsmoment bezüglich der Präzessionsachse zu

$$I_z = (49,0 \pm 0,5) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad (17)$$

wobei sich der Fehler nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{I_z} = m_A \sqrt{\frac{1}{4} \sigma_{r_A}^2 r_A^2 + \frac{1}{6} \sigma_{d_A}^2 d_A^2 + 4 \sigma_{a_A}^2 a_A^2 \left(\frac{m_A}{m_R} + 1 \right)^2} \quad (18)$$

ergibt. Die an den verwendeten Geräten direkt angegebenen Größen wurden dabei als exakt angenommen.

5.2. Trägheitsmoment aus physikalischem Pendel

In Tabelle B sind die Ergebnisse der ersten Messung aufgetragen. Für die Periodendauer T_R wurden die gemessenen Zeiten τ durch die Anzahl N der gemessenen Perioden geteilt, der Fehler ergibt sich dann zu $\sigma_{T_R} = \tau/N$. Die Kreisfrequenz berechnet sich aus diesen Werten durch $\omega = 2\pi/T$, wobei sich der Fehler nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_\omega = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_T}{T^2} \quad (19)$$

ergibt. Mit Gleichung (8) wurde daraus das polare Trägheitsmoment I_x des Rades bestimmt, der Fehler wird nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{I_x} = m_P \sqrt{\sigma_{T_R}^2 \frac{T_R^2}{4\pi^4} g^2 a_P^2 + \sigma_{a_P}^2 \left(\frac{T_R^2}{4\pi^2} g - 2a_P \right)^2} \quad (20)$$

berechnet. Bildet man den gewichteten Mittelwert der so erhaltenen Werte wie in Gleichung (a), ergibt sich als Ergebnis

$$\bar{I}_x = (10,93 \pm 0,16) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad (21)$$

wobei der Fehler aus Gleichung (b) folgt.

5.3. Trägheitsmoment aus Präzession

Zur Auswertung der zweiten Messreihe wurde die Periodendauer der Rotation für jede Messung der Präzession durch Mittelwertbildung der Rotationswerte vor und nach der Präzessionsmessung bestimmt:

$$\bar{T}_R = \frac{T_{R1} + T_{R2}}{2}. \quad (22)$$

Der Fehler ergibt sich nach Gleichung (c), der Formel für stark abweichende Messwerte. Aus den gemessenen halben Periodendauern der Präzession lässt sich die Periodendauer bestimmen, der Fehler verdoppelt sich hier einfach. Daraus wiederum lassen sich Rotations- und Präzessionsfrequenz bestimmen über $\omega = \frac{2\pi}{T}$, der Fehler ist wie in Gleichung (19) gegeben. Die so erhaltenen Werte sind in Tabelle C aufgeführt.

Nun wird die Präzessionsfrequenz gegen die reziproke Rotationsfrequenz aufgetragen. Dazu werden die Messwerte mit `gnuplot` geplottet und ein linearer Zusammenhang $\omega_P = k \frac{1}{\omega_R} + b$ gefittet. Die Ergebnisse für die drei Gewichte sind in den Abbildungen A bis C dargestellt. Dabei wurde nach der Fehlerfortpflanzung der Fehler der reziproken Rotationsfrequenz mit

$$\sigma_{\omega_R^{-1}} = \frac{\sigma_{\omega_R}}{\omega_R^2}. \quad (23)$$

aufgetragen. Die Fitparameter sind in Tabelle 1 aufgeführt.

m_{Pr} [kg]	k [1/s ²]	b [Hz]
0,040	$9,2 \pm 0,7$	$0,023 \pm 0,011$
0,060	$16,1 \pm 1,0$	$0,008 \pm 0,015$
0,080	$16,2 \pm 1,1$	$0,072 \pm 0,014$

Tabelle 1: Fitparameter der Präzessionsfrequenz

Nach Gleichung (13) lässt sich aus der Proportionalitätskonstanten k das Trägheitsmoment I_x über den Zusammenhang

$$I_x = \frac{m_{Pr} g a_{Pr}}{k} \quad (24)$$

berechnen, der Fehler ergibt sich nach der Fehlerfortpflanzung zu

$$\sigma_{I_x} = \frac{m_{Pr} g}{k} \sqrt{\sigma_{a_{Pr}}^2 + \sigma_k^2 \frac{a_{Pr}^2}{k^2}}. \quad (25)$$

Die daraus berechneten Trägheitsmomente sind in Tabelle 2 aufgeführt.

m_{Pr} [kg]	I_x [kg m ²]
0,040	$(11,6 \pm 0,9) \times 10^{-3}$
0,060	$(9,9 \pm 0,7) \times 10^{-3}$
0,080	$(13,2 \pm 0,9) \times 10^{-3}$

Tabelle 2: Berechnung des Trägheitsmoments aus der Präzessionsfrequenz

Über das gewichtete Mittel (a) mit der Fehlerformel für stark abweichende Werte (c) ergibt sich als Ergebnis

$$\bar{I}_x = (11,3 \pm 1,0) \times 10^{-3} \text{ kg m}^2. \quad (26)$$

5.4. Nutationsfrequenz

Die Ergebnisse der dritten Messung sind in Tabelle D aufgetragen. Die Periodendauer der Rotation wurde über die beiden Werte vor und nach der jeweiligen Nutationsmessung gemittelt, vergleiche wieder Gleichung (22). Der Fehler berechnet sich analog über die Fehlerformel für stark abweichende Werte (c). Für die Nutation erhält man die Periodendauer, indem man die gemessene Zeit und den Fehler durch die Anzahl der gemessenen Perioden teilt. Aus diesen Werten erhält man je die Winkelfrequenz über $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit dem Fehler aus Gleichung (19).

Zwischen den beiden Frequenzen erwartet man nach Gleichung (14) einen linearen Zusammenhang mit der Proportionalitätskonstante $k = I_x/I_z$. Zur Bestimmung dieser wurden die Messdaten mit `gnuplot` geplottet und eine Regressionsgerade $\omega_N = k \cdot \omega_R + b$ gefittet. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen D und E dargestellt.

Augenscheinlich weicht bei der zweiten Messreihe der erste Messwert, das ist der mit der größten Rotationsfrequenz, stark von der Regressionsgerade ab. Deswegen wurde eine weitere Regressionsgerade auf die Messdaten ohne den ersten Messwert gefittet, das Ergebnis ist in Abbildung F dargestellt. Die Fitparameter aller drei Regressionen sind in Tabelle 3 aufgeführt.

	k [1]	b [Hz]
Messreihe 1	$0,142 \pm 0,008$	$1,4 \pm 0,6$
Messreihe 2 (a)	$0,119 \pm 0,008$	$3,5 \pm 0,6$
Messreihe 2 (b)	$0,140 \pm 0,005$	$2,2 \pm 0,4$

Tabelle 3: Fitparameter der Nutationsfrequenz

6. Diskussion

6.1. Vergleich der Trägheitsmomente

Die in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 berechneten Trägheitsmomente bezüglich der Figurenachse sind in Tabelle 4 gegenübergestellt.

	I_x [kg m ²]
Versuchsparameter	$9,93 \times 10^{-3}$
Physikalisches Pendel	$(10,93 \pm 0,16) \times 10^{-3}$
Präzession	$(11,3 \pm 1,0) \times 10^{-3}$

Tabelle 4: Vergleich der berechneten Trägheitsmomente

Man erkennt, dass die einzelnen Ergebnisse nicht in den Fehlerintervallen der jeweils anderen liegen, die Einzelergebnisse also nicht miteinander kompatibel sind. Bei der Berechnung aus den Versuchsparametern wurde mit den am Versuchsaufbau angegebenen Daten gerechnet. Hier kann eine Fehlerquelle liegen, wenn die tatsächlichen Werte von den angegebenen abweichen sollten. Werden sie aber als korrekt angenommen, müssen die experimentellen Bestimmungen auf Fehlerquellen untersucht werden.

Beim *physikalischen Pendel* weisen die Einzelwerte der berechneten Trägheitsmomente nur eine geringe Streuung auf, das gebildete Mittel liegt also vermutlich dicht am wahren Wert. Daraus lässt sich schließen, dass das Rad gut eingespannt war und keine krummlinigen Bewegungen die Messdaten verfälscht haben.

Eine Fehlerquelle liegt aber in der Messung der Schwingungsdauern. Da der Ausschlag des Pendels sehr schnell abnimmt, waren die späten Perioden häufig nur schwer auszumachen. Es wäre vermutlich genauer gewesen, eine geringere Anzahl von Perioden zu messen, um das Ende der Periode genauer bestimmen zu können. Außerdem war die Bestimmung des Abstandes von Pendelgewicht und Drehachse sehr schwierig.

Betrachtet man die Messung der *Präzession*, so ist aufgrund des deutlich größeren Aufwandes eine genauere Bestimmung des Trägheitsmoments zu erwarten. Tatsächlich weist der bestimmte Wert aber den größten Fehler auf und die Einzelergebnisse, die zur Mittelwertbildung des Trägheitsmoments herangezogen worden sind, sind stark gestreut.

Auffällig ist jedoch, dass sich für jede Messreihe die Daten gut durch eine Ausgleichsgerade beschreiben lassen, die Messung in sich also sehr konsistent erscheint. Die größte Streuung liegt bei der Messung mit dem Zusatzgewicht von 80 g vor. Durch das hohe Gewicht war der Kreisel so stark geneigt, dass es womöglich zusätzlich zu einer Nutationsbewegung gekommen ist.

Fehlerquellen bei der Präzession sind außerdem die Zeitmessungen. Insbesondere das rechtzeitige Anbringen der Lichtschranke und die Bestimmung der halben Präzessionsperiode sind sehr ungenau. Auch, dass sich die Rotationsfrequenz über eine halbe Präzessionsperiode stark ändert, macht das Bilden eines Mittelwerts zur weiteren Rechnung sehr unpräzise.

6.2. Nutation

In Tabelle 5 ist das experimentell bestimmte Verhältnis der beiden Trägheitsmomente sowie ihre Abweichung von dem erwarteten Wert eingetragen, den man aus den in Abschnitt 5.1 aus den Versuchsparametern bestimmten Trägheitsmomenten erhält.

	I_x/I_z	Abweichung
Versuchsparameter	$0,203 \pm 0,003$	
Messreihe 1	$0,142 \pm 0,008$	30,0 %
Messreihe 2 (a)	$0,119 \pm 0,008$	41,4 %
Messreihe 2 (b)	$0,140 \pm 0,005$	$(31,0 \pm 0,4) \%$

Tabelle 5: Vergleich des Verhältnisses der Periodendauern von Nutation und Rotation

Die experimentell bestimmten Werte weichen vom erwarteten Wert um mindestens 30 % ab, eine besonders große Abweichung ergibt sich bei der zweiten Messreihe, wenn man den ersten Messwert in die Regression einbezieht. Zur Untersuchung möglicher Fehlerquellen dieses Experiments betrachtet man daher zunächst diesen ersten Messwert der zweiten Messreihe. Offensichtlich hat schon ein einzelner Messwert einen großen Einfluss auf das Fit-Ergebnis. Da hier die Nutationsfrequenz sehr hoch war, liegt eine große Fehlerquelle im korrekten Abzählen der Perioden und im rechtzeitigen Stoppen der Zeit.

Außerdem nimmt die Nutationsamplitude schnell ab, sodass wie beim physikalischen Pendel nach einigen Perioden die Durchgänge nicht mehr gut ausgemacht werden können. Bei manchen Messungen wäre es vielleicht besser gewesen, weniger Periodendauern zu messen. Da der lineare Zusammenhang zwischen Rotations- und Nutationsfrequenz eine Näherung für kleine Auslenkungen darstellt, besteht bei der Durchführung auch die Gefahr, dem Kreisel einen zu großen Drehimpuls zu versetzen. Insbesondere bei den späten Messungen mit geringer Rotationsfrequenz kann schon ein relativ leichter Schlag den Kreisel zu sehr großer Nutation anregen.

Eine weitere potentielle Fehlerquelle liegt in der Berechnung des Abstandes vom Rad zur Drehachse. Dieser wurde nicht direkt ausgemessen, sondern nach den Hebelgesetzen aus dem Abstand des Ausgleichsgewichts von der Drehachse bestimmt. Dabei wurden die Masse des Rades und des Ausgleichsgewichts als punktförmig angenommen. Hierin kann ein Fehler liegen, der den aus den Versuchsparametern berechneten Wert beeinflusst.

6.3. Verbesserungsvorschläge

Insgesamt ist der Versuchsaufbau gut zusammengestellt und einsatzbereit. Wünschenswert wäre aber eine Lichtschranke, die schon sehr kurze Zeiten aufnehmen kann. Bei der Versuchsdurchführung ist aufgefallen, dass die Lichtschranke erst ab Zeiten von etwa 0,050 s Werte aufnehmen kann. Für größere Periodendauern des Rades wird stets 0,000 s angezeigt. Stünde eine präzisere Lichtschranke zur Verfügung, könnten die Messungen schon bei höheren Rotationsfrequenzen begonnen werden.

A. Messwerte

Rad

Masse m_R	1,324 kg
Radius r_R	0,1225 m
Dicke d_R	0,028 m

Pendelgewicht

Masse m_P	0,100 kg
Abstand Drehachse a_P	(0,135 ± 0,005) m

Ausgleichsgewicht

Masse m_A	0,938 kg
Radius r_A	(0,029 ± 0,001) m
Dicke d_A	(0,043 ± 0,001) m
Abstand Drehachse a_A	(0,165 ± 0,001) m

Präzessionsgewicht

Abstand Drehachse a_{Pr}	(0,272 ± 0,001) m
----------------------------	-------------------

Tabelle A: Parameter des Versuchsaufbaus

Messung	Periodendauer T_R [s]	Frequenz ω_R [Hz]	Trägheitsmoment I_x [kg m ²]
1	1,984 ± 0,020	0,316 ± 0,004	0,0114 ± 0,0005
2	1,935 ± 0,020	0,308 ± 0,004	0,0107 ± 0,0005
3	1,965 ± 0,020	0,313 ± 0,004	0,0111 ± 0,0005
4	1,922 ± 0,020	0,306 ± 0,004	0,0106 ± 0,0005
5	1,924 ± 0,020	0,306 ± 0,004	0,0106 ± 0,0005
6	1,979 ± 0,020	0,315 ± 0,004	0,0113 ± 0,0005
7	1,984 ± 0,020	0,316 ± 0,004	0,0114 ± 0,0005
8	1,916 ± 0,020	0,305 ± 0,004	0,0105 ± 0,0005

Tabelle B: Kreisel als physikalisches Pendel

Masse m_{Pr} [kg]	Rotation		Präzession	
	Periodendauer \bar{T}_R [s]	Frequenz ω_R [Hz]	Periodendauer T_P [s]	Frequenz ω_P [Hz]
0,040	$0,059 \pm 0,012$	106 ± 22	$57,3 \pm 0,5$	$0,1097 \pm 0,0010$
	$0,084 \pm 0,013$	75 ± 12	$43,8 \pm 0,5$	$0,1434 \pm 0,0014$
	$0,111 \pm 0,015$	57 ± 8	$34,9 \pm 0,4$	$0,1800 \pm 0,0020$
	$0,148 \pm 0,023$	43 ± 7	$26,7 \pm 0,4$	$0,235 \pm 0,003$
	$0,097 \pm 0,015$	65 ± 10	$38,8 \pm 0,4$	$0,1620 \pm 0,0017$
	$0,130 \pm 0,019$	49 ± 7	$27,6 \pm 0,4$	$0,2280 \pm 0,0028$
	$0,104 \pm 0,024$	61 ± 13	$34,9 \pm 0,4$	$0,1800 \pm 0,0020$
	$0,139 \pm 0,012$	45 ± 4	$28,5 \pm 0,4$	$0,2203 \pm 0,0027$
0,060	$0,055 \pm 0,008$	114 ± 17	$41,8 \pm 0,5$	$0,1502 \pm 0,0015$
	$0,071 \pm 0,008$	88 ± 10	$31,9 \pm 0,4$	$0,1971 \pm 0,0023$
	$0,087 \pm 0,008$	72 ± 7	$27,9 \pm 0,4$	$0,2252 \pm 0,0028$
	$0,104 \pm 0,009$	61 ± 5	$23,4 \pm 0,4$	$0,2690 \pm 0,0037$
	$0,093 \pm 0,017$	68 ± 13	$27,1 \pm 0,4$	$0,2320 \pm 0,0029$
	$0,121 \pm 0,012$	52 ± 5	$20,3 \pm 0,4$	$0,310 \pm 0,005$
	$0,101 \pm 0,010$	62 ± 7	$22,8 \pm 0,4$	$0,275 \pm 0,004$
	$0,123 \pm 0,012$	51 ± 5	$18,9 \pm 0,3$	$0,333 \pm 0,006$
0,080	$0,056 \pm 0,006$	113 ± 12	$28,5 \pm 0,4$	$0,2208 \pm 0,0027$
	$0,067 \pm 0,006$	94 ± 8	$26,1 \pm 0,4$	$0,241 \pm 0,004$
	$0,078 \pm 0,006$	81 ± 7	$22,5 \pm 0,4$	$0,280 \pm 0,004$
	$0,091 \pm 0,007$	69 ± 6	$19,7 \pm 0,3$	$0,319 \pm 0,005$
	$0,105 \pm 0,007$	60 ± 4	$18,7 \pm 0,3$	$0,337 \pm 0,006$
	$0,061 \pm 0,006$	104 ± 10	$28,0 \pm 0,4$	$0,2244 \pm 0,0028$
	$0,073 \pm 0,007$	87 ± 8	$25,0 \pm 0,4$	$0,251 \pm 0,004$
	$0,085 \pm 0,006$	74 ± 5	$21,8 \pm 0,4$	$0,288 \pm 0,005$

Tabelle C: Präzession des Kreisels

Rotation		Nutation	
Periodendauer \bar{T}_R [s]	Frequenz ω_R [Hz]	Periodendauer T_N [s]	Frequenz ω_N [Hz]
<i>Erste Messreihe</i>			
$0,066 \pm 0,010$	95 ± 15	$0,427 \pm 0,013$	$0,155 \pm 0,005$
$0,086 \pm 0,010$	73 ± 9	$0,521 \pm 0,013$	$0,165 \pm 0,005$
$0,112 \pm 0,016$	56 ± 8	$0,664 \pm 0,014$	$0,168 \pm 0,004$
$0,147 \pm 0,020$	43 ± 6	$0,863 \pm 0,015$	$0,170 \pm 0,003$
<i>Zweite Messreihe</i>			
$0,054 \pm 0,006$	116 ± 13	$0,377 \pm 0,012$	$0,143 \pm 0,005$
$0,067 \pm 0,007$	94 ± 10	$0,403 \pm 0,013$	$0,165 \pm 0,006$
$0,081 \pm 0,008$	78 ± 8	$0,486 \pm 0,013$	$0,167 \pm 0,005$
$0,100 \pm 0,011$	63 ± 7	$0,580 \pm 0,013$	$0,172 \pm 0,005$
$0,119 \pm 0,009$	53 ± 4	$0,645 \pm 0,016$	$0,184 \pm 0,005$
$0,145 \pm 0,017$	43 ± 5	$0,753 \pm 0,021$	$0,192 \pm 0,006$
$0,175 \pm 0,014$	36 ± 3	$0,803 \pm 0,029$	$0,218 \pm 0,008$

Tabelle D: Nutation des Kreisels

B. Formelsammlung

B.1. Gewichteter Mittelwert

Hat man zu einer Messgröße mehrere unabhängige Ergebnisse mit unterschiedlichen Fehlern vorliegen, so bietet es sich an, die Einzelergebnisse mit ihrem reziproken Fehler gewichtet zu mitteln, sodass Ergebnisse mit geringerem Fehler ein größeres Gewicht haben als stärker fehlerbehaftete Werte. Sind x_i die n Einzelergebnisse mit Fehlern σ_i , so ist der *gewichtete Mittelwert* \bar{x} gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (\text{a})$$

Für den Fehler des gewichteten Mittels gibt es zwei unterschiedliche Formeln. Liegen die Einzelergebnisse überwiegend in ihren gegenseitigen Fehlerbereichen, so lässt sich der Fehler $\sigma_{\bar{x}}$ bestimmen durch

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (\text{b})$$

Weichen die Einzelergebnisse stark voneinander ab, kann man stattdessen auf die folgende Fehlerformel zurückgreifen:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^2}}{(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}. \quad (\text{c})$$

B.2. Fehlerfortpflanzung

Untersucht man eine Größe $f = f(x, y, \dots)$, die von unabhängigen gemessenen Größen x, y, \dots mit verschiedenen Messwerten $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots$ abhängt, interessiert man sich für den Fehler des Bestwertes von f . Dieser ergibt sich durch Einsetzen der Bestwerte \bar{x}, \bar{y}, \dots . Dabei gilt das Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}) \right)^2 + \sigma_y^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{y}) \right)^2 + \dots} \quad (\text{d})$$

C. Abbildungen

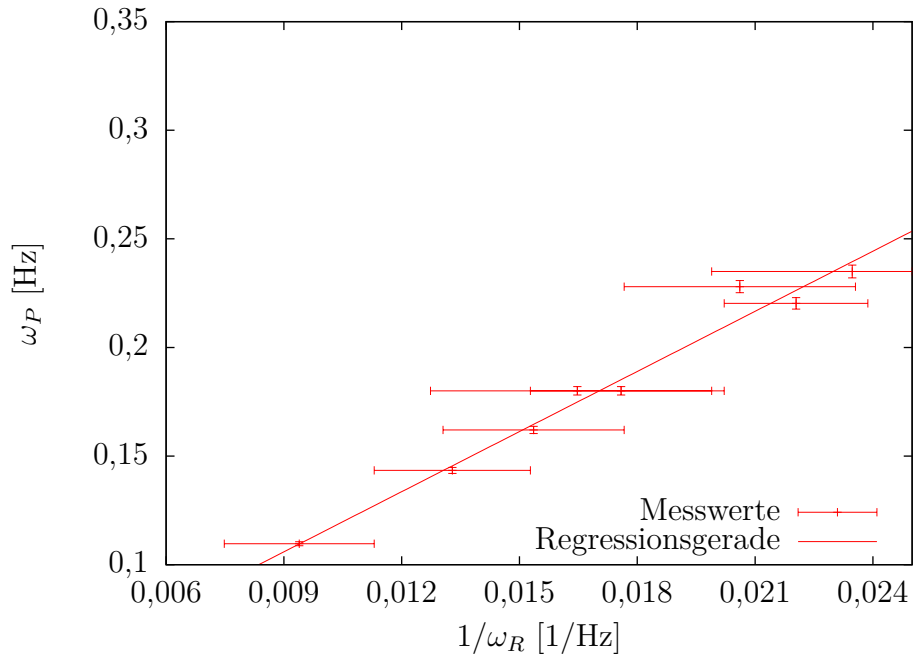


Abbildung A: Auswertung der Präzessionsfrequenz für $m_{Pr} = 40 \text{ g}$

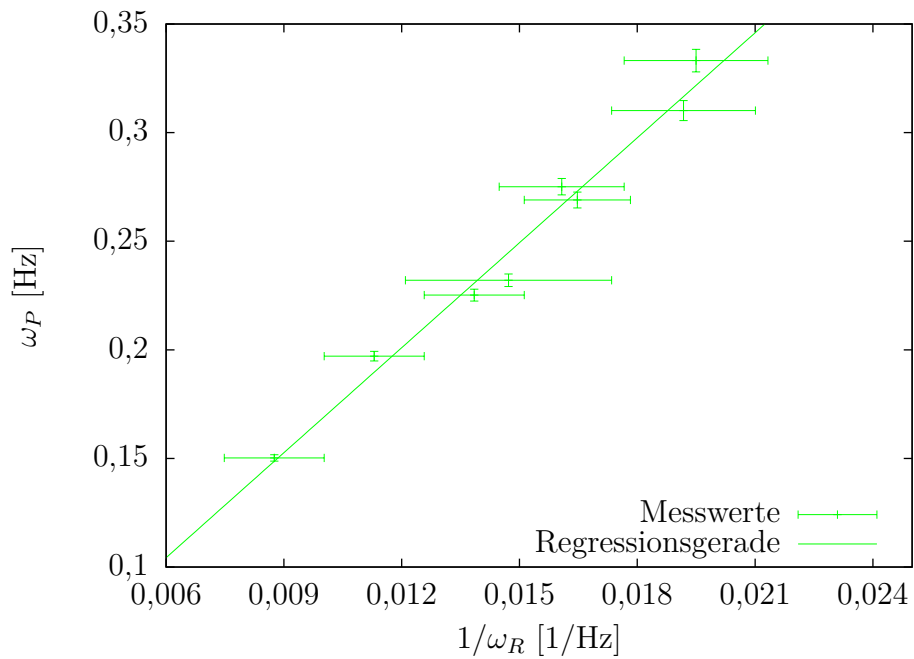


Abbildung B: Auswertung der Präzessionsfrequenz für $m_{Pr} = 60 \text{ g}$

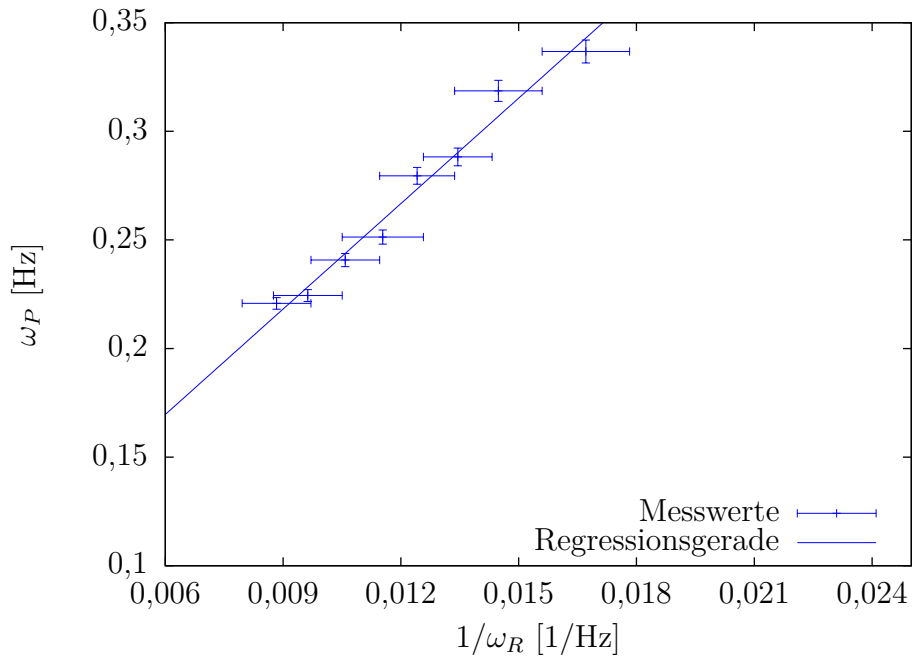


Abbildung C: Auswertung der Präzessionsfrequenz für $m_{Pr} = 80$ g

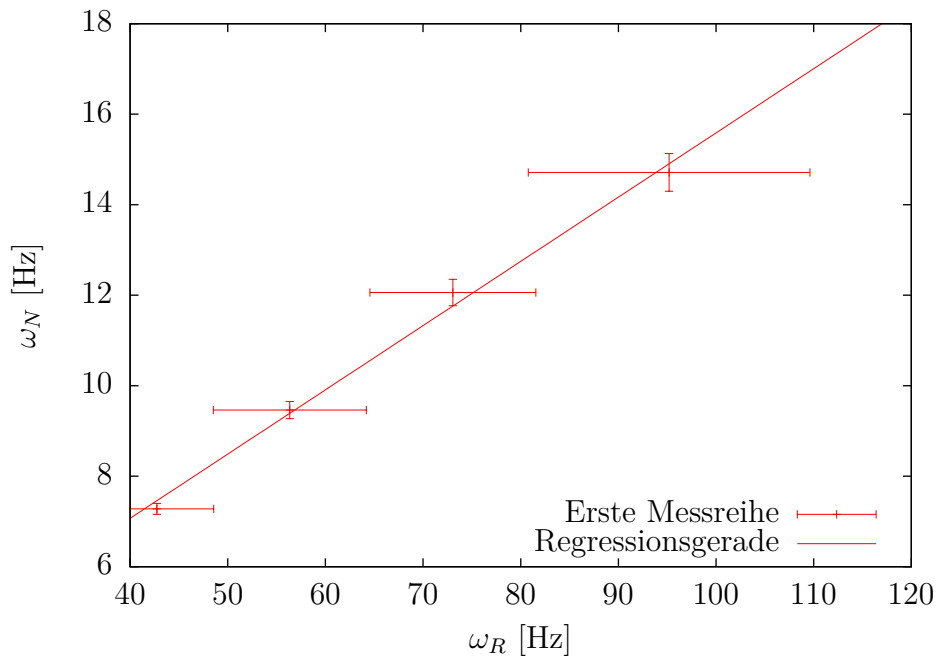


Abbildung D: Auswertung der Nutationsfrequenz – Erste Messreihe

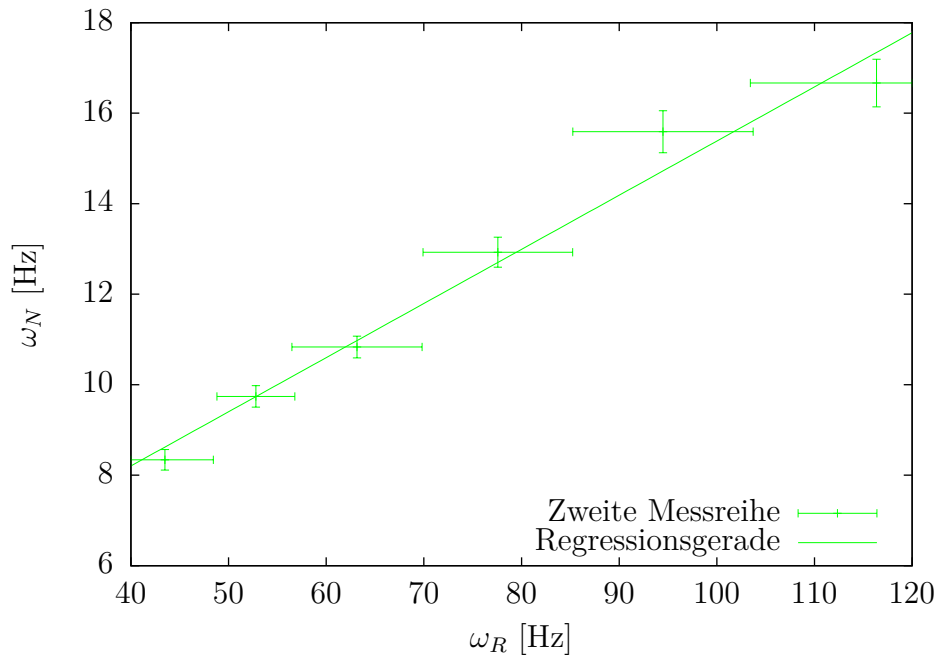


Abbildung E: Auswertung der Nutationsfrequenz – Zweite Messreihe

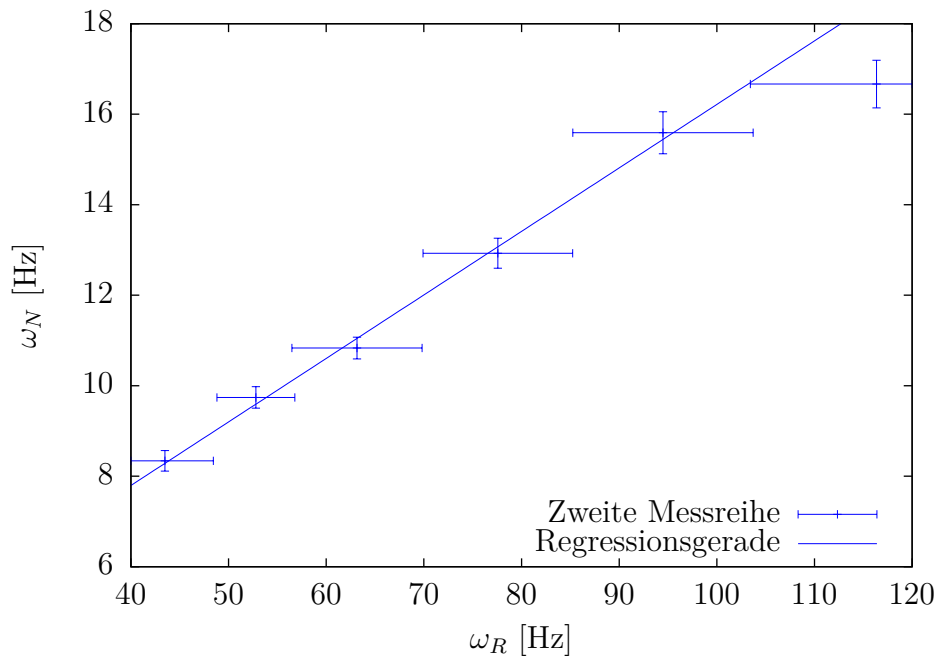


Abbildung F: Auswertung der Nutationsfrequenz – Zweite Messreihe mit alternativer Regressionsgerade

D. Literatur

- [BS] Gobrecht, Heinrich. *Bergmann, Schäfer. Lehrbuch der Experimentalphysik. Band I. Mechanik, Akustik, Wärme.* Zehnte Auflage. Berlin, 1990.
- [GER] Meschede, Dieter. *Gerthsen Physik.* Dreiundzwanzigste Auflage. Berlin, 2006.
- [HAR] Harten, Ulrich. *Physik. Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler.* Fünfte Auflage. Berlin, 2012.
- [LAN] Landau, Lew & Lifschitz, Jewgeni. *Lehrbuch der theoretischen Physik. Band I. Mechanik.* Vierzehnte Auflage. Frankfurt am Main, 2004.
- [LP] Lehrportal Physik. *Kreiselpräzession.* Online im Internet: <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3637>, abgerufen am 19.06.12, 21:31 Uhr.
- [NOL] Nolting, Wolfgang. *Grundkurs Theoretische Physik 1. Klassische Mechanik.* Neunte Auflage. Berlin, 2011.
- [NPP] Eichler, Hans; Kronfeldt, Heinz-Detlef & Sahm, Jürgen. *Das Neue Physikalische Grundpraktikum.* Zweite Auflage. Berlin, 2006.
- [TIP] Tipler, Paul & Mosca, Gene. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure.* Zweite Auflage. München, 2004.