

## Versuch 3

# Das Trägheitsmoment

---

Praktikant:           Joscha Knolle  
                              Ole Schumann  
E-Mail:                joscha@htilde.de  
Durchgeführt am:   18.06.2012  
Abgabe:               25.06.2012

Testiert:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2. Theorie</b>	<b>2</b>
2.1. Drehimpuls, Trägheitsmoment und Rotationsenergie . . . . .	2
2.2. Das Trägheitsellipsoid . . . . .	3
<b>3. Materialien und Methoden</b>	<b>4</b>
3.1. Der Steinersche Satz . . . . .	4
3.2. Bestimmung des Trägheitsmoments eines physikalischen Pendels .	4
<b>4. Durchführung</b>	<b>5</b>
4.1. Der Versuchsaufbau . . . . .	5
4.1.1. Teil A: Betrachtung von Drehschwingungen . . . . .	5
4.1.2. Teil B: Messung der Winkelbeschleunigung . . . . .	5
4.2. Versuchsdurchführung . . . . .	6
4.2.1. Teil A: Drehschwingungen . . . . .	6
4.2.2. Teil B: Winkelbeschleunigung . . . . .	7
<b>5. Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1. Bestimmung der Winkelrichtgröße . . . . .	7
5.2. Bestimmung der Trägheitsmomente der Körper . . . . .	9
5.3. Trägheitsmoment des Tischchens . . . . .	11
5.4. Das Trägheitsmoment des Rades . . . . .	11
<b>6. Diskussion</b>	<b>13</b>
6.1. Diskussion der ersten Messreihe . . . . .	14
6.2. Diskussion der zweiten Messreihe . . . . .	14
<b>A. Messwerte</b>	<b>I</b>
<b>B. Literaturverzeichnis</b>	<b>III</b>

## 1. Einleitung

Die bekannten Newtonschen Bewegungsgleichungen beschreiben Translationen von Körpern, für Rotationen benötigt man jedoch weitere Begriffe, wie das Trägheitsmoment, das Drehmoment und den Drehimpuls.

Das Trägheitsmoment stellt die Analogie zur Masse bei Translationen dar: Bei geradlinigen Bewegungen widersetzt sich die Masse der Bewegung, bei Drehungen ist es das Trägheitsmoment, was entgegen der Bewegung „wirkt“.

In diesem Versuch wollen wir uns den Rotationen nähern und insbesondere einige Trägheitsmomente experimentell ermitteln und anschließend diese Werte mit den theoretisch bestimmten Daten vergleichen.

## 2. Theorie

### 2.1. Drehimpuls, Trägheitsmoment und Rotationsenergie

Analog zu geradlinigen Bewegungen, wo der Impuls das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit ist, gibt es bei der Rotation den Drehimpuls, welcher den Abstand einzelner Massepunkte zur Drehachse berücksichtigt:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (1)$$

Jedes Massenelement  $dm$  eines Körpers besitzt nun einen Abstand  $\vec{r}_i$  von der Drehachse und eine Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$ , welche sich auch durch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ausdrücken lässt:  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Nun kann man die kinetische Energie eines jeden Masselements berechnen durch

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} dm \cdot \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} dm (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 \quad (2)$$

und erhält dann mittels Integration über den gesamten Körper die Rotationsenergie:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_V (\vec{e}_\omega \times \vec{r})^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_V r_\perp^2 dm = \frac{1}{2} \Theta \omega^2, \quad (3)$$

wobei  $\Theta$  nun das *Trägheitsmoment* bezeichnet.

Die Bestimmung des Trägheitsmoments eines Körpers erfordert also das Lösen des Integrals

$$\Theta := \int_V r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \cdot \rho dV, \quad (4)$$

was bei Körpern mit wenig oder gar keiner Symmetrie beliebig kompliziert werden kann. [DEM, S. 137 f.]

Es gibt allerdings weitere Wege, um das Trägheitsmoment zu bestimmen. Wird ein beliebiger Körper mit einer Spiralfeder verbunden und dann um einen Winkel  $\varphi$  ausgelenkt, so erzeugt diese Feder ein rücktreibendes Drehmoment  $M = D \cdot \varphi$ . Die Größe  $D$  heißt Winkelrichtgröße oder auch Richtmoment. Dieser Wert kann wie eine Art Federkonstante verstanden werden und ist vergleichbar mit der Federkonstante  $k$  beim Hookschen Gesetz  $F = -k\Delta s$ . Die nach dem zweiten Newtonschen Gesetz aufstellbare Bewegungsgleichung  $M = \Theta \cdot \ddot{\varphi} = D \cdot \varphi$  lässt sich lösen (vgl. Protokoll 1, Pohlscher Resonator) und man erhält

$$\Theta = D \cdot \left( \frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad T_s = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D}}, \quad (5)$$

wobei  $T_s$  die Periodendauer einer Schwingung beschreibt.

## 2.2. Das Trägheitsellipsoid

Wichtig zu bemerken ist, dass sich das Trägheitsmoment immer auf eine fest gewählte Rotationsachse bezieht. Um das Trägheitsmoment für eine beliebige (normierte) Achse  $\hat{\omega}$ , die durch den Schwerpunkt verläuft zu bestimmen, muss der so genannte Trägheitstensor verwendet werden:

$$\underline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die Einträge  $\Theta_i$  auf der Diagonalen stellen nun die Trägheitsmomente bezüglich der zwei Hauptträgheitsachsen (hier wird  $\Theta$  maximal bzw. minimal, die Hauptträgheitsachsen stehen stets senkrecht aufeinander) und einer dritten Achse, die auf den beiden anderen Achsen senkrecht steht, dar. Fasst man den Tensor als lineare Abbildung auf, die zu einer quadratischen Form gehört, so kann man das Trägheitsmoment  $\Theta_\omega$  bezüglich der Achse  $\hat{\omega}$  über  $\Theta_\omega = \omega^T \underline{\Theta} \omega = \omega_1^2 \Theta_1 + \omega_2^2 \Theta_2 + \omega_3^2 \Theta_3$  bestimmen. Da in den Versuchen jedoch immer eine Hauptträgheitsachse senkrecht auf der Drehachse liegt, kann man beispielsweise  $\omega_3 = 0$  setzen. [NOL, S. 313 ff.]

Setzt man nun  $\omega_1 = \omega \cos \alpha$  und  $\omega_2 = \omega \cos \beta$ , so ergibt sich eine Ellipsengleichung mit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

wobei  $\Theta_1 = 1/a^2$ ,  $\Theta_2 = 1/b^2$ ,  $x = \cos \alpha / \sqrt{\Theta}$  und  $y = \cos \beta / \sqrt{\Theta}$ .

## 3. Materialien und Methoden

### 3.1. Der Steinersche Satz

Eine weitere Möglichkeit, das Trägheitsmoment eines Körpers zu bestimmen, ist der Fall, wenn die Achse B parallel in einem Abstand  $a$  zu der Achse A, die durch den Schwerpunkt geht, verläuft:

$$\Theta_B = \int_V r^2 dm = \int_V (\vec{r}_s + \vec{a})^2 dm = \int_V \vec{r}_s^2 dm + 2\vec{a} \cdot \int_V \vec{r}_s dm + \vec{a}^2 \int_V dm. \quad (8)$$

Der erste Term ist nun gerade das Trägheitsmoment  $\Theta_A$  und der letzte Term liefert die Gesamtmasse  $M$  multipliziert mit dem Abstandsquadrat der Achsen  $a^2$ . Der zweite Term fällt nun aber gerade weg, da unser Koordinatensystem genau in den Schwerpunkt des Körpers gelegt wurde und sich dort alle mit der Masse gewichteten Abstände aufheben, denn so ist ja gerade der Schwerpunkt definiert. Es bleibt also

$$\Theta_B = \Theta_A + a^2 M \quad (9)$$

für das Trägheitsmoment bezüglich der parallelen Achse. [DEM, S. 138] Diese Methode werden wir später verwenden, um das Trägheitsmoment des Stabs zu berechnen, wenn die Achse nicht durch den Schwerpunkt verläuft.

### 3.2. Bestimmung des Trägheitsmoments eines physikalischen Pendels

Um im zweiten Teil unseres Versuchs das Trägheitsmoment bestimmen zu können, müssen wir zu erst noch bestimmen, wie wir aus den gegebenen Größen (Periodendauer, Massen, Radien etc.) das Trägheitsmoment ausrechnen können.

Für das Pendel gilt nach den Newtonschen Gesetzen die Bewegungsgleichung

$$M = \Theta \cdot \ddot{\varphi} \quad (10)$$

mit dem Drehmoment  $M$  und der Winkelbeschleunigung  $\ddot{\varphi} = a/R$ . Hier ist  $a$  die Beschleunigung, die später die herabfallenden Massestücke ausüben werden und  $R$  der Radius des großen Schwungrads.

Da die wirkende Kraft  $F$  stets senkrecht zu dem Radius  $r$  den kleinen Rades wirkt, gilt zusätzlich

$$M = F \cdot r. \quad (11)$$

Da die Massestücke auch an dem kleinen Rad eine Drehung hervorrufen, muss dieser Term in der Kraft berücksichtigt werden, so dass sich ergibt

$$\begin{aligned} nM &= F \cdot r = m \cdot r(g - \ddot{\varphi}r) \\ \Rightarrow \Theta &= \frac{M}{\ddot{\varphi}} = \frac{m \cdot r(g - \ddot{\varphi}r)}{\ddot{\varphi}} = \frac{mrg}{\ddot{\varphi}} - mr^2 \\ &= \frac{m \cdot r \cdot g \cdot R}{a} - mr^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Mit dieser Formel können wir nun das Trägheitsmoment des Pendels berechnen.

Zusätzlich kann man das Trägheitsmoment auch aus der Schwingungsdauer des Pendels berechnen [TIP, S. 555]:

$$\Theta = \frac{T^2 \cdot g \cdot m \cdot z}{4\pi^2} \quad (13)$$

## 4. Durchführung

### 4.1. Der Versuchsaufbau

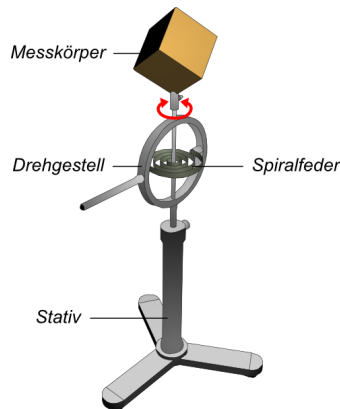
Das Trägheitsmoment wird auf zwei verschiedene Weisen bestimmt. In Teil A wird das Moment verschiedener Körper bezüglich verschiedener Achsen aus Dreh-schwingungen ermittelt. In Teil B bestimmen wir das Trägheitsmoment aus der Winkelbeschleunigung.

#### 4.1.1. Teil A: Betrachtung von Drehschwingungen

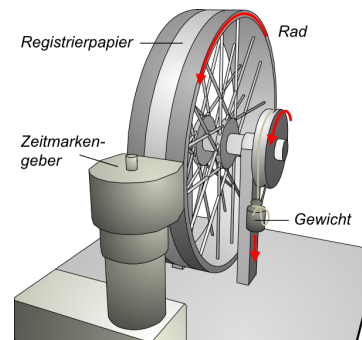
In Abbildung 1(a) ist eine Skizze des ersten Versuchs abgebildet. Auf einem Stativ wird ein Gestell mit einer Spiralfeder befestigt. Diese Feder ist mit einer vertikal durch das Gestell angeordneten Drillachse verbunden, so dass am oberen Ende der jeweilige Probekörper durch eine Drehklemme befestigt werden kann. Durch Auslenken des Körpers wird somit auch die Spiralfeder ausgelenkt und es kommt zur Schwingung.

#### 4.1.2. Teil B: Messung der Winkelbeschleunigung

Der zweite Teil des Versuchs wird mit der in Abbildung 1(b) dargestellten Versuchsa-paratur zur Bestimmung des Trägheitsmoments aus der Winkelbeschleunigung durchgeführt. Auf ein eingespanntes Rad wird ein Papierstreifen befestigt. Ein Markengeber zeichnet während des Versuchs im zeitlichen Abstand von 0,1 s Zeitmarken auf den Streifen. Auf ein weiteres, über die Drehachse mit dem großen Rad



(a) Teil A: Trägheitsmoment aus Drehschwingungen



(b) Teil B: Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

**Abbildung 1:** Apparaturen zur Bestimmung des Trägheitsmoments [LP]

verbundenes Schwungrad wird ein Faden aufgewickelt, welcher durch verschiedene herabfallende Gewichte das Rad beschleunigt.

## 4.2. Versuchsdurchführung

### 4.2.1. Teil A: Drehschwingungen

Als erstes werden die geometrischen Eigenschaften der Objekte vermessen:

- Radii (bzw. Umfang) von Kugel, Zylinder, Scheibe, Hohlzylinder (innen und außen);
- Abstand der Hantelkörper;
- Kantenlänge des Würfels, Länge des Stabes, Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt;
- Massen der Körper.

Anschließend wird der Aufbau so ausgerichtet, dass die Drillachse horizontal liegt. Dann werden verschiedene Gewichte angehängt, damit verschiedene Drehmomente auf die Achse wirken. Über diese kann später über eine lineare Regression die Winkelrichtgröße  $D$  der Spiralfeder bestimmt werden. Die Gewichte werden auf zwei Arten montiert, so dass auf die Feder Momente nach links und rechts wirken.

Nun werden die verschiedenen Versuchskörper „vermessen“: Dazu werden diese in die Halterung eingespannt und in Schwingung versetzt. Die Periodendauer von fünf bis zehn Schwingungen wird für jeden Körper dreimal bestimmt. Bei dem Würfel werden die Achsen durch antipodische Flächen und durch die Raumdiagonale

bestimmt, bei dem Stab zwei parallele Achsen, von denen die eine nicht durch den Schwerpunkt geht.

Zusätzlich wird noch eine Art „Tischchen“ montiert, bei dem verschiedene Rotationsachsen eingestellt werden können. Hier werden in 15°-Schritten wieder die Werte für die Periodendauer bestimmt.

#### 4.2.2. Teil B: Winkelbeschleunigung

Zuerst werden wieder einige Versuchsparameter bestimmt. Die Radien der Felge und des Schwungrades werden gemessen und anschließend ein Streifen Registrierpapiers auf die Felge geklebt und der Markengeber so justiert, dass die Zeitmarken gut zu erkennen sind.

Durch herabfallende Massen mit 0,1 kg, 0,2 kg, 0,5 kg und 1 kg werden verschiedene Drehmomente auf das Rad ausgeübt, was dadurch beschleunigt wird. Dabei zeichnet der Markengeber in 0,1 s Abständen Markierungen auf das Papier.

In einer zweiten Messreihe wird nun ein Zusatzgewicht an einer Speiche montiert. Hier muss wieder der Abstand zu dem Gewicht vermessen werden. Nun wird das dadurch erzeugte physikalische Pendel in Schwingung versetzt und die Periodendauer für 10 Schwingungen bestimmt. Diese Messung wird nun wiederholt, wobei das Gewicht an die gegenüberliegende Seite versetzt wird.

## 5. Auswertung

### 5.1. Bestimmung der Winkelrichtgröße

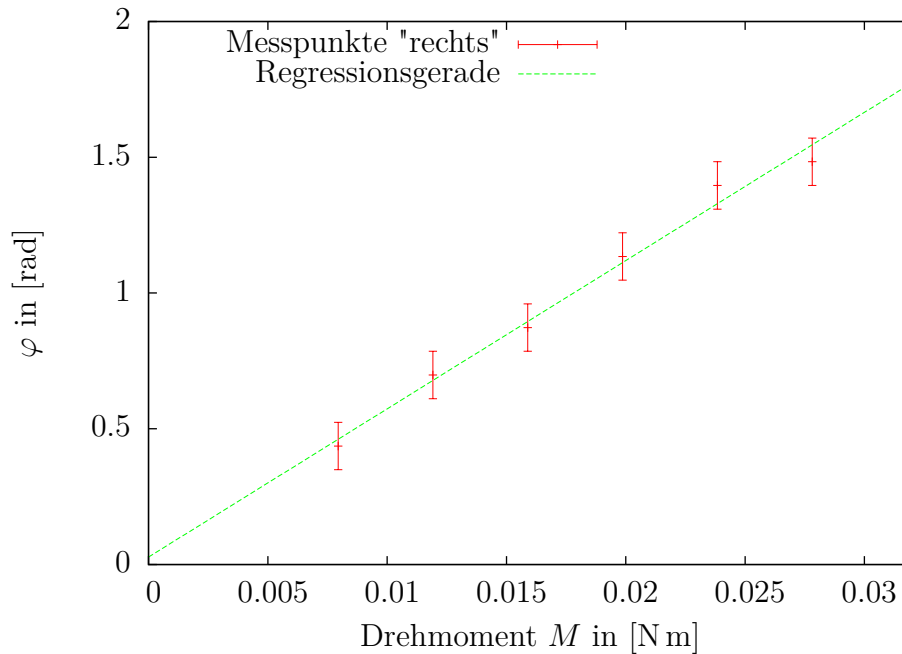
Im ersten Teil des Versuchs haben wir für verschiedene Massen die Auslenkung der Spiralfeder gemessen. Die durch die Massen wirkenden Drehmomente lassen sich über  $M = m \cdot g \cdot r$  bestimmen, wobei  $m$  die Masse des angehängten Körpers ist,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $r$  den Radius der Scheibe bezeichnet. Den Radius haben wir zu  $r = (8,1 \pm 0,1)$  cm gemessen. Über die Gleichung

$$M = \varphi \cdot D \iff D = \frac{M}{\varphi} \quad (14)$$

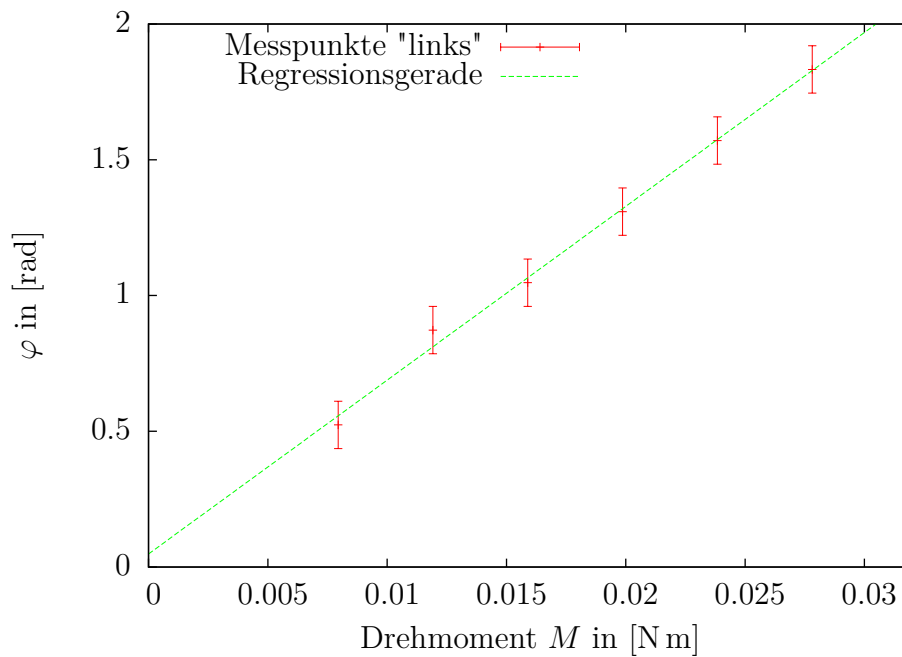
lässt sich nun durch eine lineare Regression die Winkelrichtgröße  $D$  bestimmen. In Abbildung 2 ist für die Auslenkung nach rechts das wirkende Trägheitsmoment  $M$  gegen den gemessenen Winkel  $\varphi$  aufgetragen (in Abbildung 3 befindet sich selbiges mit Auslenkung nach links). Den Fehler für den Winkel  $\varphi$  haben wir mit  $\sigma_\varphi = 5^\circ$  angenommen. Aus den Steigungen  $s_r$  und  $s_l$  können wir nun die Winkelrichtgröße bestimmen:  $D_r = 1/s_r$  und  $D_l = 1/s_l$ . Die linearen Regressionen



mit `gnuplot` ergaben für die Steigungen Werte von  $s_r = (55 \pm 3)/(N\,m)$  und  $s_l = (64 \pm 2)/(N\,m)$ .



**Abbildung 2:** Messwerte für Auslenkung nach rechts



**Abbildung 3:** Messwerte für Auslenkung nach links

Für die Auslenkung nach rechts erhalten wir also  $D_r = (1,8 \pm 0,2) \times 10^{-2} \text{ N m}$  und für die Auslenkung nach links  $D_l = (1,56 \pm 0,06) \times 10^{-2} \text{ N m}$ . Für den weiteren Verlauf werden wir auf das gewichtete Mittel dieser beiden Werte zurückgreifen, welches sich über

$$D = \frac{\frac{D_l}{\sigma_{D_l}^2} + \frac{D_r}{\sigma_{D_r}^2}}{\frac{1}{\sigma_{D_l}^2} + \frac{1}{\sigma_{D_r}^2}} \quad (15)$$

mit dem Fehler

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{D_r}^2} + \frac{1}{\sigma_{D_l}^2}}} \quad (16)$$

berechnet. Demnach ist unsere Winkelrichtgröße durch

$$D = (1,62 \pm 0,05) \times 10^{-2} \text{ N m} \quad (17)$$

gegeben.

## 5.2. Bestimmung der Trägheitsmomente der Körper

Aus unseren Daten können wir die verschiedenen Trägheitsmomente auf zwei Arten bestimmen:

1. über das Lösen des oben genannten Integrals unter Verwendung der Gestalt und Massen der Körper;
2. über die Schwingungsdauer des Drehpendels.

Um die Übersicht zu wahren, werden wir für den ersten Punkt nur die zu lösenden Integrale einschließlich Lösung angeben und auf längere Rechnungen verzichten.

Allgemein berechnet sich das Trägheitsmoment über

$$\Theta = \int_V \vec{r}_\perp^2 dm = \int_V \vec{r}_\perp^2 \cdot \rho dV. \quad (18)$$

In Tabelle 1 ist nun eine Übersicht über diese Integrale für die einzelnen Körper gegeben. Zusätzlich sind auch gleich die Werte aus der Drehschwingung eingefügt, um eine Gegenüberstellung der zwei Methoden zu erreichen. Die Werte aus der Schwingung wurden mit Hilfe von Gleichung (5) berechnet. Der Fehler berechnet sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$\sigma_{\Theta_{\text{Schwing}}} = \frac{T}{2\pi^2} \sqrt{\left(\frac{T}{4\pi}\right)^2 \sigma_D^2 + D^2 \sigma_T^2}. \quad (19)$$

Körper	Integral	Lösung	$\Theta_{\text{int}}$ [ $10^{-4}$ kg m <sup>2</sup> ]	$\Theta_{\text{Schwing}}$ [ $10^{-4}$ kg m <sup>2</sup> ]
Kugel	$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^4 \rho \sin(\theta) dr d\varphi d\theta$	$\frac{2}{5} R^2 m$	$4,16 \pm 0,04$	$3,44 \pm 0,02$
(Voll-)Zylinder	$\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H r^3 \rho dr dh d\theta$	$\frac{1}{2} R^2 m$	$2,77 \pm 0,03$	$2,39 \pm 0,02$
Scheibe	Spezialfall von Vollzylinder	s.o.	$12,8 \pm 0,4$	$9,66 \pm 0,05$
Hohlzylinder	$\int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^H r^3 \rho dr dh d\theta$	$\frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) m$	$2,58 \pm 0,03$	$3,94 \pm 0,02$
Hantelkörper	direkt über $\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2$	$r^2 m$	$32,20 \pm 0,16$	$36,24 \pm 0,04$
Würfel	$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2 + z^2) \rho dx dy dz$	$\frac{1}{6} a^2 m$	$5,09 \pm 0,06$	$3,80 \pm 0,02$
Stab (durch SP)	$\int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho dx$	$\frac{1}{12} l^2 m$	$35,2 \pm 0,3$	$26,30 \pm 0,12$
Stab (versetzt)	$\int_{-l/2}^{l/2} x^2 \rho dx + b^2 m$	$(\frac{1}{12} l^2 + b^2) m$	$46,6 \pm 0,3$	$20,25 \pm 0,09$

**Tabelle 1:** Übersicht über die Trägheitsmomente

Der Wert für das Trägheitsmoments des Würfels ist bei der Berechnung des Integrals für beide Drehachsen identisch. Für den Würfel ist in der Tabelle in der Spalte  $\Theta_{\text{Schwing}}$  nur der Wert des Trägheitsmoments für eine Drehung um die Diagonale angegeben. Die Drehung um die Seitenmitte liefert einen Wert von  $(4,10 \pm 0,04) \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

### 5.3. Trägheitsmoment des Tischchens

In Tabelle D sind die Werte für die Schwingungsdauern des Tischchens in Abhängigkeit von dem Winkel  $\varphi$  angegeben. Die Trägheitsmomente  $\Theta_\varphi$  des Tischchens für verschiedene Auslenkungen ergeben sich genau analog wie bei den anderen Objekten (vgl. Gleichung (5)).

Trägt man nun den Winkel  $\varphi$  gegen die reziproke Quadratwurzel der  $\Theta_\varphi$  auf, so erhält man das in Abbildung 4 gegebene Ellipsoid. Dort sind zusätzlich die Hauptträgheitsachsen markiert. Diese wurden „per Augenmaß“ eingefügt und können zu  $115^\circ$  und  $15^\circ$  abgelesen werden.

Die Trägheitsmomente  $\Theta_a$  und  $\Theta_b$  an diesen beiden Achsen können nun über

$$\Theta_a = \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \Theta_b = \frac{1}{b^2} \quad (20)$$

bestimmt werden. Der dabei entstehende Fehler wird sicherlich durch das Ablesen der Achsen dominiert, welchen wir auf  $0,5 \times 10^{-4} \text{ kg m}^2$  geschätzt haben. Damit ergeben sich die Trägheitsmomente bezüglich dieser Achsen zu

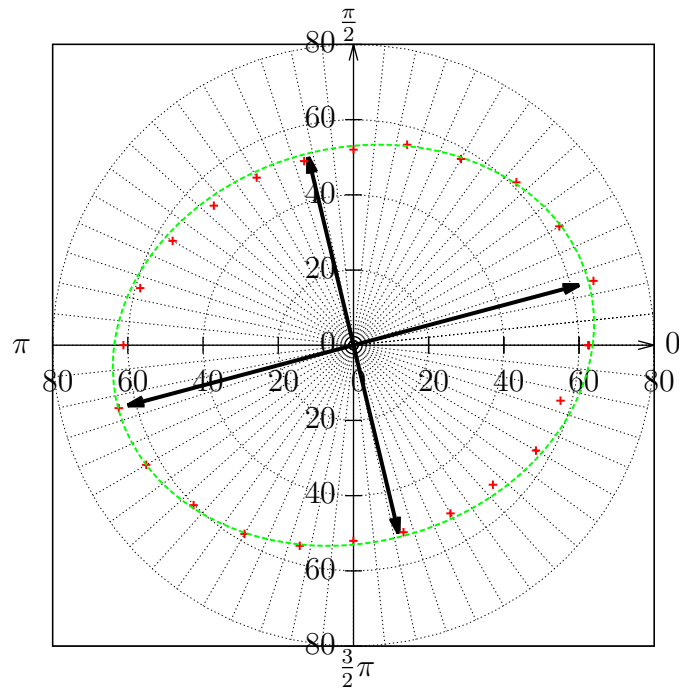
$$\Theta_a = (2,2 \pm 0,5) \times 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad \text{und} \quad \Theta_b = (4,0 \pm 0,5) \times 10^{-4} \text{ kg m}^2. \quad (21)$$

Mit diesen Werten kann man die passende Ellipse in unser Diagramm hinzufügen (grüne Kurve) und so die Abweichungen von dem „Idealwert“ ablesen.

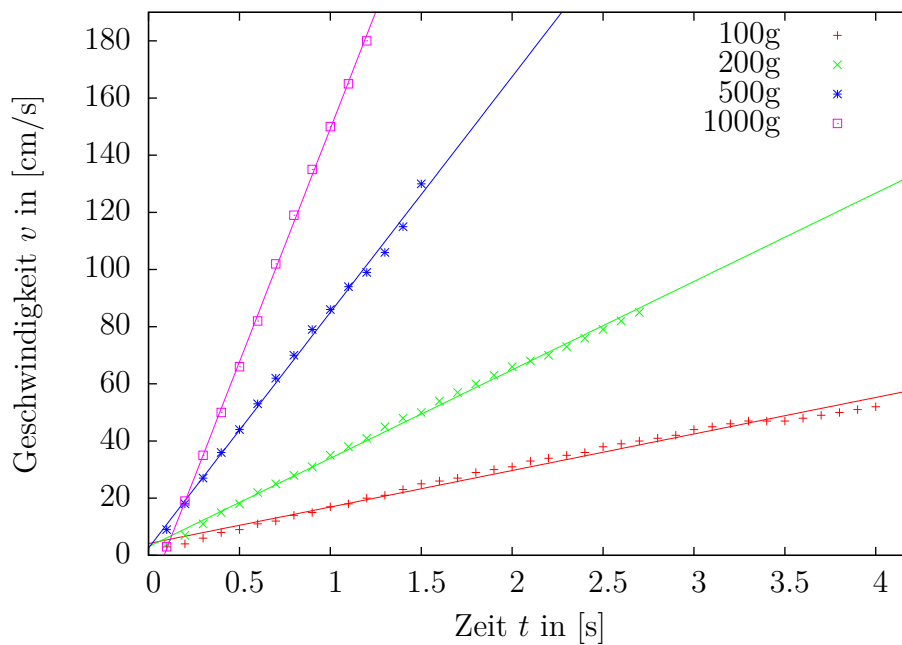
### 5.4. Das Trägheitsmoment des Rades

Durch Ausmessen der Striche, die der Zeitmarkengeber alle 0,1s auf den Papierstreifen gedruckt hat, können wir die durchschnittliche Geschwindigkeit  $v$  des Rades bestimmen. Da durch das herabfallende Gewicht eine konstante Beschleunigung wirkt, erwartet man einen linearen Anstieg der Geschwindigkeit. In Abbildung 5 sind für die vier Gewichte die Messdaten (Punkte) zusammen mit linearen Regressionen (durchgezogene Linien), welche mit `gnuplot` durchgeführt wurden, aufgetragen.

Da die Steigung der gefunden Ausgleichsgerade die Beschleunigung angibt, kann man nun das Trägheitsmoment mit Hilfe von Gleichung (12) bestimmen. Der



**Abbildung 4:** Trägheitsellipsoid für das Tischchen



**Abbildung 5:** Lineare Regressionen der Fallkurven

Fehler ergibt sich dabei zum einen aus dem Fehler des  $\chi^2$ -Fits und zum anderen durch die gemessenen Größen  $r$  und  $R$ . Die Fehlerfortpflanzung liefert hier

$$\sigma_{\Theta} = \frac{mg}{a} \sqrt{\left(\frac{rR}{a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(R + \frac{2ra}{g}\right)^2 \sigma_r^2 + r^2 \sigma_R^2}. \quad (22)$$

Zusätzlich berechnen wir noch das gewichtet Mittel  $\bar{\Theta}$  über

$$\bar{\Theta} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\Theta_i}{\sigma_{\Theta_i}^2}}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sigma_{\Theta_i}^2}} \quad (23)$$

mit dem Fehler

$$\sigma_{\bar{\Theta}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sigma_{\Theta_i}^2}}}. \quad (24)$$

Daraus ergeben sich die in Tabelle 2 dargestellten Werte.

$m$ [kg]	$a$ [m/s]	$\sigma_a$ [m/s]	$\Theta$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\sigma_{\Theta}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\bar{\Theta}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\sigma_{\bar{\Theta}}$ [kg m <sup>2</sup> ]
0,1	0,127 814	0,003	0,147	0,007	0,1205	0,0005
0,2	0,309 341	0,004	0,121	0,006		
0,5	0,824 643	0,02	0,111	0,006		
1	1,632 87	0,02	0,109	0,006		

**Tabelle 2:** Werte für  $\Theta$  aus der Winkelbeschleunigung

Eine weitere Möglichkeit, das Trägheitsmoment des Rades zu bestimmen, ist es, die Periodendauer  $T$  des zum physikalischen Pendel ausgebauten Rades zu verwenden. Dieser Zusammenhang wurde in Gleichung (13) beschrieben. Die Schwingungsdauern des Pendels sind in Tabelle F eingetragen. Daraus können wir nun die Periodendauer  $T$  und anschließend das Trägheitsmoment berechnen. Für die erste Schwingung ergibt sich so ein Wert von  $\Theta_1 = (0,083 \pm 0,004) \text{ kg m}^2$  und für die zweite Schwingung  $\Theta_2 = (0,081 \pm 0,004) \text{ kg m}^2$ .

## 6. Diskussion

Im folgenden wollen wir auf unsere Messreihen eingehen und versuchen, unsere Messergebnisse sinnvoll zu bewerten.

### 6.1. Diskussion der ersten Messreihe

Bei der Vermessung der Winkelrichtgröße haben wir zwei Werte erhalten, die zwar nicht im Fehlerintervall liegen, jedoch nicht gravierend voneinander abweichen. Hier vermuten wir einen vernünftigen Wert mit realistischem Fehler durch die Mittelung der zwei Werte erhalten zu haben. Weitere Messungen mit mehr Gewichten wären hier jedoch schön gewesen, um das wichtige Zwischenergebnis besser bestimmen zu können, da die folgenden Auswertungen alle von der Winkelrichtgröße abhängen.

Die Werte für das Trägheitsmoment der verschiedenen Körper weichen teilweise kaum (Vollzylinder) und teilweise gravierend (Stab) voneinander ab, wie man auch leicht in Tabelle 1 erkennen kann. Die großen Abweichungen bei dem Stab können wir uns nicht vollständig erklären. Ansätze sind aber, dass die Näherung beim Integral zu grob sind. Hier haben wir nämlich angenommen, dass die Masse homogen verteilt ist und die Bohrung genau in der Mitte ist. Die homogene Massenverteilung wird durch die verschiedenen Bohrlöcher jedoch gestört und kann so eigentlich nicht angenommen werden. Da diese Abweichung aber schwer zu quantifizieren ist, können wir keinen richtigen Fehler dafür angeben oder abschätzen, ob dies schon für so große Abweichungen sorgen kann.

Die anderen Körper liegen leider auch alle nicht in den Fehlerintervallen, so dass wir mit unseren Messungen nicht zufrieden sein können.

Wir vermuten weitere große Fehler bei der Bestimmung der Körpereigenschaften, da uns nur starre Lineale und eine Balkenwaage zur Verfügung standen, was die Genauigkeit unserer Daten nicht unbedingt verbesserte.

Bei dem Tischchen sind wir trotz der groben Skaleneinteilung sehr zufrieden mit unseren Messwerten. Die durch `gnuplot` gefittete Ellipse liegt gut auf unseren Messpunkten und es gibt keine zu großen Abweichungen.

### 6.2. Diskussion der zweiten Messreihe

Bei der zweiten Messreihe hatten wir einige Probleme, den genauen Abstand des Gewichts von der Drehachse zu bestimmen, da Speichen und Schrauben ständig den direkten Messweg behindert haben. Auch den Umfang bzw. den Radius des Rades konnten wir nur mit Hilfe des aufgeklebten Papierstreifens bestimmen, was allerdings auch nicht sonderlich präzise war.

So konnten wir bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Rades nicht verlässlich das Gewicht an die gegenüberliegende Seite montieren. Trotzdem liegen die beiden aus der Schwingungsdauer gewonnenen Werte relativ nah aneinander, so dass sich die gegebenen Abweichungen offenbar gut gegeneinander aufgehoben haben.

Leider unterscheiden sich diese Werte deutlich von denen, die wir durch die herabfallenden Gewichte gewonnen haben. So können wir hier Abweichungen bis zu 32 % feststellen, was nur auf einen systematischen Fehler zurückzuführen ist, da die Messungen untereinander konsistent sind, d. h. die Werte für die herabfallenden Gewichte relativ gut zueinander passen.



## A. Messwerte

Körper	Masse [g]	Radius [mm]	Höhe/Länge [mm]	Dicke [mm]
Kugel	400 ± 5	51 ± 1		
Zylinder	347 ± 5	40 ± 1	79 ± 1	
Scheibe	390 ± 5	81 ± 1		6 ± 1
Hohlzylinder	257 ± 5	35 ± 1	99 ± 1	7 ± 1
Hantelkörper	200 ± 5		187 ± 1	
Würfel	477 ± 5		80 ± 1	
Stab	169 ± 5			500 ± 2
Tischchen	385 ± 5			

**Tabelle A:** Körpereigenschaften

Masse [g]	Masse rechts angehängt $\varphi$ [°]	Masse links angehängt $\varphi$ [°]
10	25 ± 10	30 ± 10
15	40 ± 10	50 ± 10
20	50 ± 10	60 ± 10
25	65 ± 10	75 ± 10
30	80 ± 10	90 ± 10
35	85 ± 10	105 ± 10

**Tabelle B:** Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$

Körper	Schwingungsdauer [s]			Anzahl $T$
	Schwingung 1	Schwingung 2	Schwingung 3	
Kugel	9,41	8,95	9,12	10
Zylinder	7,61	7,59	7,70	10
Scheibe	15,40	15,37	15,27	10
Hohlzylinder	9,77	9,88	9,75	10
Hantel	14,76	14,86	14,96	5
Würfel Spitze	9,74	9,81	9,65	10
Würfel Fläche	9,77	10,06	9,98	10
Stab verschoben (82 mm)	25,40	25,43	25,05	10
Stab Mitte	22,22	22,20	22,23	10

**Tabelle C:** Bestimmung der Schwingungsdauern

A. MESSWERTE

Winkel [°]	Zeit [s]	Periodenzahl	Winkel [°]	Zeit [s]	Anzahl Perioden
0	7,91	10	180	8,07	10
15	7,47	10	195	7,64	10
30	7,81	10	210	7,76	10
45	8,06	10	225	8,21	10
60	8,63	10	240	8,52	10
75	8,94	10	255	8,94	10
90	9,49	10	270	9,49	10
105	9,74	10	285	9,59	10
120	9,59	10	300	9,56	10
135	9,40	10	315	9,41	10
150	8,89	10	330	8,81	10
165	8,41	10	345	8,66	10
			360	7,88	10

**Tabelle D:** Schwingungsdauer des Tischchens

	Massen in [kg]			
	0,1	0,2	0,5	1
Zeit in [s]	Abstand in [cm]			
0,1	0,3	4	0,9	0,3
0,2	0,4	0,7	1,8	1,9
0,3	0,6	1,1	2,7	3,5
0,4	0,8	1,5	3,6	5
0,5	0,9	1,8	4,4	6,6
0,6	1,1	2,2	5,3	8,2
0,7	1,2	2,5	6,2	10,2
0,8	1,4	2,8	7,0	11,9
0,9	1,5	3,1	7,9	13,5
1,0	1,7	3,5	8,6	15,0
1,1	1,8	3,8	9,4	16,5
1,2	2,0	4,1	9,4	18,0
1,3	2,1	4,5	10,6	
1,4	2,3	4,8	11,5	
1,5	2,5	5,0	13,0	
1,6	2,6	5,4		
1,7	2,7	5,7		
1,8	2,9	6,0		
1,9	3,0	6,3		
2,0	3,1	6,6		
2,1	3,3	6,8		

	Massen in [kg]			
	0,1	0,2	0,5	1
Zeit in [s]	Abstand in [cm]			
2,2	3,4	7,0		
2,3	3,5	7,3		
2,4	3,6	7,6		
2,5	3,8	7,9		
2,6	3,9	8,2		
2,7	4,0	8,5		
2,8	4,1			
2,9	4,2			
3,0	4,4			
3,1	4,5			
3,2	4,6			
3,3	4,7			
3,4	4,7			
3,5	4,7			
3,6	4,8			
3,7	4,9			
3,8	5,0			
3,9	5,1			
4,0	5,2			
4,1	5,4			

**Tabelle E:** Bestimmung des Drehmomentes beim Rad

Radius Rad $R$	$(23,7 \pm 0,5)$ cm
Radius kleines Rad $r$	$(8,5 \pm 0,5)$ cm
Masse Zusatzgewicht $m$	$(255 \pm 5)$ g
Abstand Schwerpunkt-Drehachse	$(13 \pm 1)$ cm
Schwingungsdauer Rad als Pendel (zehn Schwingungen)	30,49 s 30,36 s

**Tabelle F:** Materialeigenschaften beim Rad

## B. Literaturverzeichnis

- [DEM] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*. Auflage 3. Berlin, 2004.
- [LP] Lehrportal Physik. *Das Trägheitsmoment*. Online im Internet: <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3606>, abgerufen am 19.06.12, 08:40 Uhr.
- [NOL] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 1. Klassische Mechanik*. Auflage 9. Berlin, 2011.
- [TIP] Paul A. Tipler, Gene Mosca. *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Auflage 6, Spektrum Akademischer Verlag, 2009