

Versuch 2

Gravitationswaage

Praktikant: Joscha Knolle
 Ole Schumann
E-Mail: joscha@htilde.de
Durchgeführt am: 11.06.2012
Abgabe: 18.06.2012

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	2
2. Theorie	2
2.1. Gravitationsmoment	2
2.2. Torsionsmoment	3
2.3. Winkelberechnungen	3
3. Durchführung	4
3.1. Versuchsaufbau	4
3.2. Versuchsdurchführung	5
4. Auswertung	5
4.1. Bestimmung der Gravitationskonstanten	7
4.2. Bestimmung des Torsionsmoduls	8
5. Diskussion	8
5.1. Die Gravitationskonstante	9
5.2. Das Torsionsmodul	9
5.3. Verbesserungsvorschläge	9
A. Tabellen der Messreihen	I

1. Einleitung

Eine der vier Grundkräfte der Natur ist die Gravitationskraft. Verantwortlich für die Schwerkraft der Erde, prägt sie das Leben der Menschen entscheidend. Gleichzeitig ist ihre Beschreibung durch die Gravitationskonstante bis heute relativ ungenau. Moderne Wissenschaftler versuchen unter sehr großem Aufwand, die Gravitationskonstante präziser zu bestimmen.

In diesem Versuch soll am Beispiel der Gravitationswaage nach CAVENDISH und EÖTVÖS nachempfunden werden, wie und unter welcher Genauigkeit die Gravitationskonstante experimentell bestimmt werden kann. Der Aufbau dieses Versuches ist in Abbildung 1 dargestellt.

2. Theorie

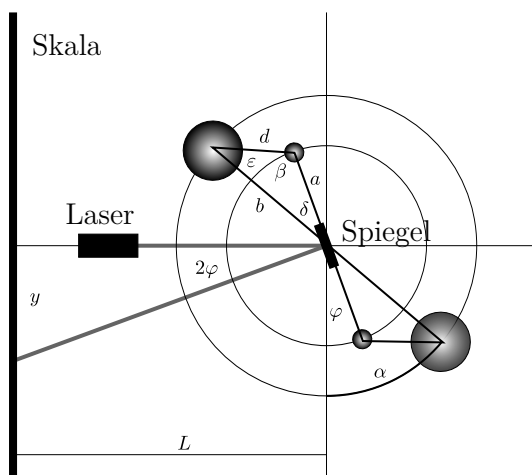
2.1. Gravitationsmoment

Das Gravitationsgesetz wurde 1665 von ISAAC NEWTON formuliert und beruht auf der Beobachtung, dass die Gravitationskraft zum einen abhängt von dem Abstand,

$$\vec{F}_G \propto \frac{1}{r^2}, \quad (1)$$

und zum anderen von der Masse der beiden Körper,

$$\vec{F}_G \propto M_1, \quad \vec{F}_G \propto M_2. \quad (2)$$



Schematischer Aufbau einer Gravitationswaage. Zwei kleine Metallkugeln sind an einem Torsionsfaden im Abstand $2a$ angebracht, darum sind drehbar zwei große Metallkugeln im Abstand $2b$ gelagert.

Abbildung 1: Versuchsaufbau

Daraus ergibt sich die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern mit Massen M_1 und M_2 mit dem Abstand r zu

$$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r. \quad (3)$$

Das Drehmoment der Gravitationskraft, genannt Gravitationsmoment M_{grav} , ergibt sich für den Versuchsaufbau in Abbildung 1 dann zu

$$M_{\text{grav}} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta. \quad (4)$$

Die Gravitationskonstante γ soll in diesem Experiment untersucht werden.

2.2. Torsionsmoment

Dazu werden zwei Metallkugeln an einem Torsionsfaden verdreht. Daher betrachten wir auch die Gesetze, die für den Torsionsvorgang gelten. Für den Versuchsaufbau, wie in Abbildung 1 gezeigt, bezeichne M die Masse der großen Kugeln mit Radius R und m die Masse der kleinen Kugeln mit Radius r . Damit ergibt sich das Trägheitsmoment der Torsionshantel zu

$$\Theta = 2m \left(\frac{2}{5}r^2 + a^2 \right). \quad (5)$$

Die Schwingungsdauer des Torsionsvorgangs berechnet sich zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D}}, \quad (6)$$

umgestellt ergibt sich die Winkelrichtgröße des Torsionsmoments zu

$$D = \frac{4\pi^2}{T^2} \Theta = \frac{8\pi^2}{T^2} m \left(\frac{2}{5}r^2 + a^2 \right). \quad (7)$$

2.3. Winkelberechnungen

Wir wollen das Gleichgewicht von Gravitationsmoment und Torsionsmoment berechnen. Dies ergibt sich zu

$$\begin{aligned} D\varphi &= M_{\text{grav}} \\ \implies \frac{8\pi^2}{T^2} m \varphi \left(\frac{2}{5}r^2 + a^2 \right) &= 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta \\ \implies \gamma &= 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2 \right) d^2}{MT^2 a \sin \beta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Im Dreieck in Abbildung 1 gilt der Sinussatz

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \delta}{d} = \frac{\sin \varepsilon}{a}, \quad (9)$$

daraus folgt für den Winkel δ

$$\sin \beta = \frac{b}{d} \sin \delta. \quad (10)$$

Approximiere $\delta = (\alpha - \varphi) \approx \alpha$ für kleine Auslenkungen φ und erhalte damit

$$\sin \beta = \frac{b}{d} \sin \alpha. \quad (11)$$

Der Kosinussatz, angewendet auf das gleiche Dreieck, liefert

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta \approx a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha. \quad (12)$$

Setzt man (11) und (12) in unsere ursprüngliche Gleichung (8) ein, erhält man eine Formel zur Berechnung der Gravitationskonstante aus dem Experiment:

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) d^3}{MT^2 ab \sin \alpha} = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}^3}{MT^2 ab \sin \alpha}. \quad (13)$$

3. Durchführung

3.1. Versuchsaufbau

Schematisch ist der Versuchsaufbau in Abbildung 1 dargestellt. An einem Torsionsfaden aus gezogenem Wolframdraht mit einem Radius $r_F = 10 \mu\text{m}$ sind zwei kleine Kugeln der Masse $m = 20 \text{ g}$ im Abstand $r = 0,75 \text{ cm}$ sowie ein Spiegel angebracht. Laut Herstellerangaben beträgt das Torsionsmodul $G = 185 \text{ GPa}$, die Zugfestigkeit $\sigma_B = 4,17 \text{ GPa}$ und das E-Modul $E = 401 \text{ GPa}$. Effektiv beträgt die Länge des Torsionsfadens vom oberen Befestigungspunkt bis zum Aufhängebalken $L_F = (720 \pm 10) \text{ mm}$. Das Trägheitsmoment der gesamten Aufhängung aus kleinen Kugeln und Spiegel beträgt $\Theta_{\text{Aufhängung}} = (4,08 \pm 0,18) \text{ g cm}^2$. Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehachse der kleinen Kugeln beträgt $a = 2,40 \text{ cm}$.

Über einen Lichtzeiger mit der senkrechten Länge $l = 265 \text{ cm}$, der über den Spiegel auf eine Skala zeigt, wird die Drehung des Torsionsfadens gemessen. Das System aus diesen beiden kleinen Kugeln ist evakuiert und in der Wand verankert.

Um dieses System sind zwei große Metallkugeln mit der Masse $M = 10\,142 \text{ g}$ drehbar gelagert. Der Abstand zwischen dem Schwerpunkt und der Drehachse der großen Kugeln beträgt $b = 10,15 \text{ cm}$. Zwischen den großen und kleinen

Kugeln wirkt die Gravitationskraft und lenkt die kleinen Kugeln aus, bis sich Gravitationsmoment und Torsionsmoment kompensieren. Für diesen Fall gelten die in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Gleichungen sowie für das Torsionsmodul G in Abhängigkeit vom Torsionsmoment

$$G = \frac{D\varphi \cdot 2 \cdot L_F}{\pi r_F^4 \varphi}. \quad (14)$$

3.2. Versuchsdurchführung

Zunächst wird die Nulllage der ruhenden Drehwaage gemessen, also in dem Zustand, in dem sich alle vier Kugeln in einer Ebene befinden. Hier muss darauf geachtet werden, dass die Kugeln nicht versehentlich angestoßen werden, da diese sonst nicht mehr zur Ruhe gebracht werden können.

Vorsichtig dreht man dann die äußeren Kugeln um $\alpha = 45^\circ$ und misst alle $\Delta t = 15$ s den zeitlichen Verlauf der Lichtzeigerauslenkung $y(t)$ über mindestens fünf Perioden. Man erhält Maximalausschläge y_i und berechnet daraus die Schwingungsdauer T der Drehwaage, sowie die Endeinstellung \bar{y} des Lichtzeigers durch

$$\bar{y} = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4} \quad (15)$$

und mittelt diese erhaltenen Werte.

Das gleiche Vorgehen führt man anschließend für eine Auslenkung der äußeren Kugeln um $\alpha = -45^\circ$ durch, man dreht also die äußeren Kugeln um -90° . Abschließend dreht man die großen Kugeln wieder auf $\alpha = 0^\circ$ zurück.

4. Auswertung

Zu Beginn des Versuches wurden die Ruhelagen abgelesen. Bei der ersten Messung ergab sich die Ruhelage zu $(120,50 \pm 0,25)$ cm, bei der zweiten Messung zu $(142,00 \pm 0,25)$ cm.

Die zwei aufgenommenen Schwingungen sind in den Abbildungen 2 und 3 abgebildet. Dabei wurden die Daten so normiert, dass sie um ihren Endpunkt schwingen. Der Endpunkt wurde wie in Gleichung (15) berechnet und der gewichtete Mittelwert über die entstandenen Werte \bar{y}_i gebildet.

Der Fehler des Endpunkts y_{end} berechnet sich zu $\sigma_{y_{\text{end}}} = 1/3 \cdot \sigma_{\bar{y}_i}$, wobei der Fehler $\sigma_{\bar{y}_i} = 0,25 \text{ cm} \cdot \sqrt{3/8}$ durch die Fehlerfortpflanzung aus Gleichung (15) gewonnen

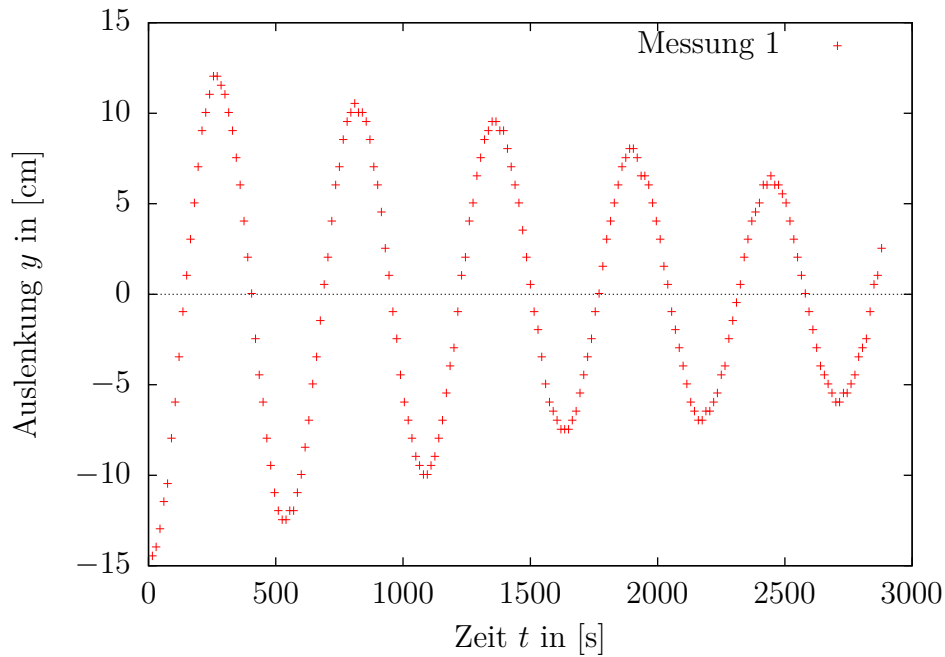


Abbildung 2: Schwingung bei Auslenkung um 45°

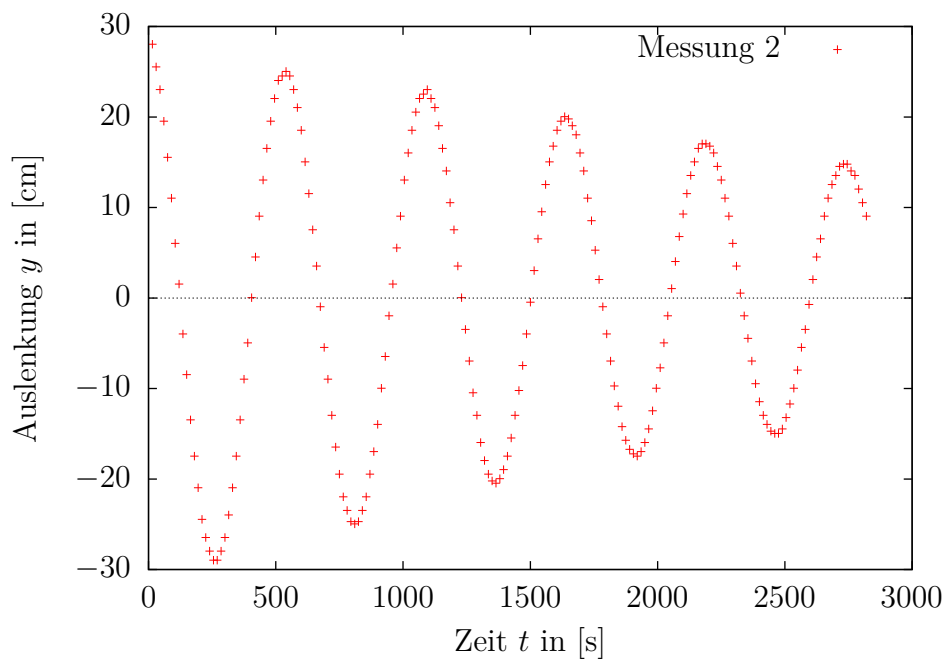


Abbildung 3: Schwingung bei Auslenkung um -45°

wurde. Außerdem wurde angenommen, dass der Fehler für jeden abgelesenen Punkt auf der Skala 0,25 cm (halbe Skaleneinteilung) beträgt.

Messung	T [s]	\bar{y} [cm]	φ [rad]
+45°	542 ± 1	14,96 ± 0,30	$(28,2 \pm 0,1) \times 10^{-3}$
-45°	549 ± 1	14,77 ± 0,30	$(27,8 \pm 0,2) \times 10^{-3}$

Tabelle 1: Ermittelte Werte für die Periodendauer, die mittlere Auslenkung und den Auslenkwinkel

Um nun die Auslenkung \bar{y} zu bestimmen, wird noch die Differenz zu den Ruhelagen bestimmt: $\bar{y} = |y_{\text{Ruhe}} - \bar{y}_i|$. Dadurch ergeben sich die beiden Werte $\bar{y}_1 = 14,96$ cm und $\bar{y}_2 = 14,77$ cm. Der Fehler berechnet sich durch die Fehlerfortpflanzung zu $\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\sigma_{y_{\text{Ruhe}}}^2 + \sigma_{\bar{y}_i}^2}$.

In jeder Messreihe wurde durch Mittelung der Abstände von Nulldurchgängen die Periodendauer T bestimmt. Der Fehler der Stoppuhr wird durch $\sigma_T = 0,1 \text{ s} + 0,005 \cdot T_i$ angegeben und beläuft sich bei beiden Messkurven für das gewichtete Mittel auf $\sigma_T = 1$ s. Somit ergeben sich die Periodendauern $T_1 = (542 \pm 1)$ s und $T_2 = (549 \pm 1)$ s.

Wie man in Abbildung 1 erkennen kann, gilt die Beziehung

$$\tan(2\varphi) = \frac{\bar{y}}{l} \iff \varphi = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\bar{y}}{l}\right). \quad (16)$$

Daher kann man nun aus den beiden Werten für \bar{y} den Winkel φ bestimmen. Der Fehler berechnet sich hierbei zu

$$\sigma_{\varphi} = \frac{\sqrt{\sigma_l^2 \cdot \bar{y}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 \cdot l^2}}{2(l^2 + \bar{y}^2)}. \quad (17)$$

Da uns kein Fehler für den senkrechten Abstand l bekannt ist, haben wir diesen mit 1 cm angenommen. Damit ergibt sich dann die in Tabelle 1 dargestellte Übersicht über unserer Messwerte.

4.1. Bestimmung der Gravitationskonstanten

Um nun die Gravitationskonstante zu berechnen benötigen wir die in Abschnitt 3.1 aufgeführten Objekteigenschaften. Dann können wir nach Gleichung (13) den gesuchten Wert berechnen:

$$\gamma = 4\pi^2 \varphi \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right) \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}^3}{MT^2 ab \sin \alpha}. \quad (18)$$

Hierbei ist α der bekannte Auslenkungswinkel 45° bzw. -45° , T die oben bestimmte Periodendauer und φ der oben bestimmte Winkel. Dann ergibt sich für die erste Messung

$$\gamma_1 = (8,4 \pm 0,4) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2) \quad (19)$$

und für die zweite Messung

$$\gamma_2 = (7,9 \pm 0,4) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2). \quad (20)$$

4.2. Bestimmung des Torionsmoduls

Nun wollen wir mit Hilfe des Literaturwerts von γ das Torsionsmodul G des Torionsfadens bestimmen. Dazu verwenden wir den in Gleichung (14) hergeleiteten Zusammenhang zwischen dem Torsionsmodul und den Konstanten, die oben angegeben sind. Das Torsionsmoment $D\varphi$ haben wir durch das Gravitationsmoment $M_{\text{grav}} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta$ ausgedrückt und für $\sin \beta$ den Sinussatz verwendet:

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{d}. \quad (21)$$

Damit ergibt sich dann insgesamt für das Torsionsmodul

$$G = 4\gamma \frac{L_F \cdot ab \cdot Mm \cdot \sin \alpha}{\pi \cdot r_F^4 \cdot \varphi \cdot d^3}. \quad (22)$$

Um d bestimmen zu können, haben wir mit Hilfe des Kosinussatzes d umgeschrieben zu $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$. Dann ergibt sich

$$G_{45^\circ} = (118 \pm 2) \text{ GPa} \quad \text{und} \quad G_{-45^\circ} = (120 \pm 2) \text{ GPa}. \quad (23)$$

Dabei haben wir $\gamma = 6,67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$ gewählt und den Fehler von G zu

$$\sigma_G = G \sqrt{\left(\frac{\sigma_{L_F}}{L_F}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\varphi}{\varphi}\right)^2 + \left(\sigma_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)^2} \quad (24)$$

bestimmt.

5. Diskussion

Im Folgenden wollen wir versuchen unsere Messwerte einzuordnen und mögliche Fehler analysieren.

5.1. Die Gravitationskonstante

Unsere Werte für γ weichen von dem Literaturwert um etwa 26% ab und somit liegt der Literaturwert auch weit von unserem Fehlerbereich entfernt.

Wir vermuten, dass der hauptsächliche systematische Fehler bei der Bestimmung der Nulllage lag, da der Laserpunkt sich vor Beginn der Messung schon leicht bewegte und so Fehler bei der Nulllage von bis zu 2 cm angenommen werden könnten. Dadurch ergäben sich aber deutliche Unterschiede bei den Werten für φ und unsere Werte für die Gravitationskonstante würden weiter in Richtung des Literaturwerts rücken.

Die Periodendauer der beiden Schwingungen konnten wir aber auf mehrere Arten gut feststellen: Zum einen über die Mittelung der Abstände von Nulldurchgängen und zum anderen durch einen χ^2 -Fit mit `gnuplot`. Dabei lag die gefittete Kurve sehr gut über unseren Messwerten, so dass wir hier annehmen, dass die Periodendauer relativ präzise gemessen wurde.

5.2. Das Torsionsmodul

Von dem angegebenen Wert von 185 GPa weichen unsere Werte um maximal 35% ab. Auch dieser Wert liegt also nicht in unserem Fehlerintervall. Allerdings wird auch hier wieder zur Bestimmung unser Wert von φ verwendet, welcher wie oben erwähnt als sehr ungenau betrachtet werden muss. Daher sind diese Abweichung eine logische Folge aus den schon schlechten Werten für die Gravitationskonstante.

5.3. Verbesserungsvorschläge

Da wir unseren hauptsächlichen Fehler bei der Bestimmung der Nulllage sehen, sollte man versuchen das System noch besser vor äußeren Stößen abzuschirmen. Zwar ist es bereits in der Wand verankert, jedoch werden trotzdem noch Stöße durch eine Stange am Boden übertragen. Könnte man diesen Faktor minimieren, so würde das System in der „Ruhelage“ weit weniger schwingen, als es bei uns getan hat.

A. Tabellen der Messreihen

t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]
15	121	495	124,5	975	133
30	121,5	510	123,5	990	131
45	122,5	525	123	1005	129,5
60	124	540	123	1020	128,5
75	125	555	123,5	1035	127,5
90	127,5	570	123,5	1050	126,5
105	129,5	585	124,5	1065	126
120	132	600	125,5	1080	125,5
135	134,5	615	127	1095	125,5
150	136,5	630	128,5	1110	126
165	138,5	645	130,5	1125	126,5
180	140,5	660	132	1140	127,5
195	142,5	675	134	1155	128,5
210	144,5	690	136	1170	130
225	145,5	705	137,5	1185	131,5
240	146,5	720	139,5	1200	132,5
255	147,5	735	141,5	1215	134,5
270	147,5	750	142,5	1230	136,5
285	147	765	144	1245	137,5
300	146,5	780	145	1260	139,5
315	145,5	795	145,5	1275	140,5
330	144,5	810	146	1290	142
345	143	825	145,5	1305	143
360	141,5	840	145,5	1320	144
375	139,5	855	145	1335	144,5
390	137,5	870	144	1350	145
405	135,5	885	142,5	1365	145
420	133	900	141,5	1380	144,5
435	131	915	140	1395	144,5
450	129,5	930	138	1410	143,5
465	127,5	945	136,5	1425	142,5
480	126	960	134,5	1440	141,5

Tabelle A: Messreihe 1 – Teil 1

A. TABELLEN DER MESSREIHEN

t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]
1455	140,5	1935	142	2415	141,5
1470	139	1950	142	2430	141,5
1485	137,5	1965	141,5	2445	142
1500	136	1980	140,5	2460	141,5
1515	134,5	1995	139,5	2475	141,5
1530	133,5	2010	138,5	2490	141
1545	132	2025	137	2505	140,5
1560	130,5	2040	136	2520	139,5
1575	129,5	2055	134,5	2535	138,5
1590	129	2070	133,5	2550	137,5
1605	128,5	2085	132,5	2565	136,5
1620	128	2100	131,5	2580	135,5
1635	128	2115	130,5	2595	134,5
1650	128	2130	129,5	2610	133,5
1665	128,5	2145	129	2625	132,5
1680	129	2160	128,5	2640	131,5
1695	130	2175	128,5	2655	131
1710	131	2190	129	2670	130,5
1725	132	2205	129	2685	130
1740	133	2220	129,5	2700	129,5
1755	134,5	2235	130	2715	129,5
1770	135,5	2250	131	2730	130
1785	137	2265	131,5	2745	130
1800	138,5	2280	133	2760	130,5
1815	139,5	2295	134	2775	131
1830	140,5	2310	135	2790	132
1845	141,5	2325	136	2805	132,5
1860	142,5	2340	137,5	2820	133
1875	143	2355	138,5	2835	134,5
1890	143,5	2370	139,5	2850	136
1905	143,5	2385	140	2865	136,5
1920	143	2400	140,5	2880	138

Tabelle B: Messreihe 1 – Teil 2

t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]
15	140,5	495	134,5	975	118
30	138	510	136,5	990	121,5
45	135,5	525	137	1005	125,5
60	132	540	137,5	1020	128,5
75	128	555	137	1035	131
90	123,5	570	135,5	1050	133
105	118,5	585	133,5	1065	134,5
120	114	600	131	1080	135
135	108,5	615	127,5	1095	135,5
150	104	630	124	1110	134,5
165	99	645	120	1125	133,5
180	95	660	116	1140	131,5
195	91,5	675	111,5	1155	129
210	88	690	107	1170	126,5
225	86	705	103,5	1185	123
240	84,5	720	99,5	1200	120
255	83,5	735	96	1215	116
270	83,5	750	93	1230	112,5
285	84,5	765	90,5	1245	109
300	86	780	89	1260	105,5
315	88,5	795	87,75	1275	102
330	91,5	810	87,5	1290	99,5
345	95	825	87,75	1305	96,5
360	99	840	89	1320	94,5
375	103,5	855	90,5	1335	93
390	107,5	870	93	1350	92,25
405	112,5	885	95,5	1365	92
420	117	900	98,5	1380	92,5
435	121,5	915	102,5	1395	93,5
450	125,5	930	106	1410	95
465	129	945	110,5	1425	97
480	132	960	114	1440	99,5

Tabelle C: Messreihe 2 – Teil 1

A. TABELLEN DER MESSREIHEN

t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]	t [s]	$y(t)$ [cm]
1455	102,25	1935	95,5	2415	99,5
1470	105	1950	96,5	2430	98,5
1485	108,5	1965	98	2445	97,75
1500	112	1980	100	2460	97,5
1515	115,5	1995	102,5	2475	97,5
1530	119	2010	104,75	2490	98
1545	122	2025	107,5	2505	99,25
1560	125	2040	110,5	2520	100,75
1575	127,5	2055	113,5	2535	102,5
1590	129,25	2070	116,5	2550	104,5
1605	131	2085	119,25	2565	107
1620	132	2100	121,75	2580	109
1635	132,5	2115	124	2595	111,75
1650	132,25	2130	126	2610	114,5
1665	131,5	2145	127,5	2625	117
1680	130,5	2160	129	2640	119
1695	128,5	2175	129,5	2655	121,5
1710	126,5	2190	129,5	2670	123,5
1725	123,5	2205	129,25	2685	125
1740	121	2220	128,5	2700	126
1755	117,75	2235	127	2715	127
1770	114,5	2250	125,5	2730	127,25
1785	111,5	2265	123,5	2745	127,25
1800	108,5	2280	121,5	2760	126,5
1815	105,5	2295	118,5	2775	126
1830	102,75	2310	116	2790	124,5
1845	100,5	2325	113	2805	123
1860	98,25	2340	110,5	2820	121,5
1875	96,75	2355	108		
1890	95,75	2370	105,5		
1905	95,25	2385	103		
1920	95	2400	101		

Tabelle D: Messreihe 2 – Teil 2