

Versuch 1

Der Pohlsche Resonator

Praktikant: Joscha Knolle
 Ole Schumann
E-Mail: joscha@htilde.de
Durchgeführt am: 04.06.2012
Abgabe: 12.06.2012

Testiert:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Schwingungsgleichungen	2
2.2	Logarithmisches Dekrement	3
2.3	Lösung der inhomogenen Differentialgleichung	4
3	Durchführung	6
3.1	Versuchsaufbau	6
3.2	Versuchsdurchführung	6
4	Auswertung	7
4.1	Freie Schwingung	7
4.2	Erzwungene Schwingung	9
5	Diskussion	11
5.1	Messreihe 1	11
5.2	Messreihe 2	12
6	Literaturverzeichnis	12

1 Einleitung

Schwingungen gehören zu den wichtigsten physikalischen Phänomenen. Man beobachtet in der Natur eine Vielzahl von Systemen, die von Schwingungen beeinflusst und geregelt werden. So schwingen die Saiten eines Instruments, Atome in einem Kristallgitter um ihre Gleichgewichtslage, Quarzkristalle in Uhren und sogar unser Herzschlag wird von oszillierenden Reaktionen beeinflusst. Diese Phänomene zu verstehen und korrekt beschreiben zu können ist also eine wichtige Aufgabe der Physik.

Wir wollen uns diesem großen Themenkomplex mit einem Experiment zu einer erzwungenen, also fremd angeregten, gedämpften Schwingung nähern. Der von ROBERT WICHARD POHL erfundene und nach ihm benannte *Pohlsche Resonator* bietet einen guten Zugang, da man hier verschiedene Dämpfungen und Erregerfrequenzen testen und vergleichen kann.

2 Theorie

Um den Versuch korrekt beschreiben und auswerten zu können, werden wir zunächst die wichtigsten theoretischen Grundlagen erläutern und einige mathematische Grundlagen darstellen.

2.1 Schwingungsgleichungen

Die wichtigste Eigenschaft schwingender Systeme ist, dass es eine zur aktuellen Auslenkung proportionale Gegenkraft gibt. So beobachtet man beispielsweise bei einem Massestück, das an eine Feder gehängt wurde, dass es umso stärker in Richtung seiner Ruhelage gezogen wird, je weiter es ausgelenkt wurde. Dies lässt sich mathematisch mit Hilfe der Federkonstanten k und der Auslenkung vom Ursprung Δs wie folgt beschreiben:

$$F = -k \cdot \Delta s. \quad (1)$$

Das Minuszeichen in dieser Gleichung soll verdeutlichen, dass die Kraft entgegen der Auslenkung wirkt. Setzt man für F die bekannte Formel $F = ma$ und für a die zweite Zeitableitung $\ddot{x}(t)$, erhält man für die Auslenkung x eine Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2)$$

Eine offensichtliche Lösung für diese DGL ist die Funktion $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 \cdot t)$ mit der (ungedämpften) Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und der Amplitude x_0 , welche aus den Anfangsbedingungen entnommen wird.

Diese Gleichung ist aber nur so lange hinreichend, wie man von einem reibungsfreien System ausgeht, welches auch keinerlei äußere Anregungen erfährt. Für eine (geschwindigkeitsabhängige) Dämpfung erweitert sich die DGL um den Summanden $\xi \dot{x}(t)$, wobei ξ ein stoff- und geometrieabhängiger Faktor ist.

Geht man nun zusätzlich von einer (periodischen) externen Anregung mit Frequenz ω und Amplitude R aus, so erweitert sich die DGL zu einer inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$m\ddot{x}(t) + \xi\dot{x}(t) + kx(t) = R \cos(\omega t). \quad (3)$$

Da wir in unserem Versuch eine Drehbewegung und keine lineare Auslenkung betrachten, müssen wir statt der Masse m das Trägheitsmoment Θ betrachten und die „Federkonstante“ k wird zu einem Rückstellmoment D . An Stelle der Auslenkungsfunktion $x(t)$ betrachten wir die Winkelfunktion $\varphi(t)$, so dass wir unsere Differentialgleichung wie folgt schreiben können:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \xi\dot{\varphi} + D\varphi = M \cos(\omega t). \quad (4)$$

Führen wir noch die folgenden Substitutionen ein (um die Lösung der DGL zu verschönern), erhalten wir

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = N \cos(\omega t), \quad (5)$$

wobei $2\beta = \xi/\Theta$, $\omega_0^2 = D/\Theta$ und $N = M/\Theta$ gilt.

Die Lösungen dieser DGL bestehen aus der Summe der homogenen Lösung ($N = 0$, d. h. keine äußere Anregung) und der speziellen Lösung.

Lösen wir die homogene DGL, erhalten wir für den Fall $\beta^2 < \omega_0^2$ eine Schwingungsgleichung der Form

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\beta t} e^{i(\omega_e t - \phi)}, \quad (6)$$

wobei φ_0 die Amplitude und ϕ eine Verschiebung vom Ursprung beschreibt. Die so genannte *Eigenfrequenz* ist durch $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ gegeben.

2.2 Logarithmisches Dekrement

Bevor wir uns der vollständigen Lösung der inhomogenen DGL nähern, wollen wir noch kurz das so genannte logarithmische Dekrement betrachten. Dieses ist

eine Maßzahl für die Stärke der Dämpfung und beschreibt im Wesentlichen das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima $\varphi(t)$ und $\varphi(t + T)$.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{\varphi\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)} &= \frac{\exp(-\beta t) \cdot \exp[i(t\omega_e - \phi)]}{\exp(-\beta t) \cdot \exp\left(-\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right) \cdot \exp\left\{i\left[\left(t + \frac{2\pi}{\omega_e}\right)\omega_e - \phi\right]\right\}} \\ &= \exp\left(\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right) \cdot \frac{\exp[i(t\omega_e - \phi)]}{\exp[i(\omega_e t + 2\pi) - \phi]} \\ &= \exp\left(\beta \frac{2\pi}{\omega_e}\right) = \exp(\beta T). \end{aligned} \quad (7)$$

Wie der Name jedoch schon suggeriert, werden wir aus naheliegenden Gründen den Logarithmus dieses Verhältnisses betrachten:

$$\Lambda := \ln\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t + T)}\right) = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\omega_e}. \quad (8)$$

2.3 Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Zur vollständigen Beschreibung des Schwingungsvorgangs benötigen wir nun noch zusätzlich die spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Dazu wählen wir folgenden Ansatz: $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t - \phi)$ mit der Phasenverschiebung ϕ (gegenüber der äußeren Anregung) und der Ausgangsamplitude φ_0 . Differenzieren und einsetzen in (5) liefert

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \varphi_0 \cos(\omega t - \phi) - 2\varphi_0 \omega \beta \sin(\omega t - \phi) - \varphi_0 \omega^2 \cos(\omega t - \phi) &= N \cos(\omega t) \\ \iff (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) - 2\omega \beta \sin(\omega t - \phi) &= \frac{N}{\varphi_0} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (9)$$

Ist nun $\omega t = \pi/2$, also die äußere Anregung gerade null, so findet man für ϕ :

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) - 2\omega \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) &= 0 \\ \iff (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi = 2\omega \beta \cos \phi \\ \iff \tan \phi = \frac{2\omega \beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Es bleibt nun noch die Amplitude φ_0 zu bestimmen, was über die Anfangsbedingung für $t = 0$ gelingt:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(-\phi) - 2\omega \beta \sin(-\phi) &= \frac{N}{\varphi_0} \\ \iff \varphi_0 = \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + 2\omega \beta \sin \phi}. \end{aligned} \quad (11)$$

Schreibt man nun $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}}$ bzw. $\sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1+\tan^2 \phi}}$ und setzt das in Gleichung (10) gefundene ein, erhält man

$$\varphi_0 = \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (12)$$

Damit sind alle Faktoren bestimmt und wir können die vollständige Lösung der inhomogenen DGL wie folgt notieren:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \\ &= \varphi_0 \cdot \cos(\omega t - \phi). \end{aligned} \quad (13)$$

Auffällig ist an diesem Zusammenhang, dass die Amplitude φ_0 der Schwingung von der Erregerfrequenz ω abhängt. Insbesondere erkennt man, dass es auch eine maximale Amplitude geben kann.

Dazu betrachtet man in Gleichung (13) den Nenner der Amplitude als Funktion von ω :

$$A(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2. \quad (14)$$

Sucht man hier nach einem Minimum (damit die Amplitude maximal wird), so findet man durch Ableiten und Umformen die so genannte Resonanzfrequenz

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$

Diese Frequenz ist also abhängig von der Dämpfung des Systems und gibt an, bei welcher äußeren Anregung das System am meisten schwingt. Zur Erinnerung: ω_0 bezeichnet die Eigenfrequenz des *ungedämpften* Systems, wenn es *keine* äußere Anregung gibt; ω_e die Eigenfrequenz des *gedämpften* Systems.

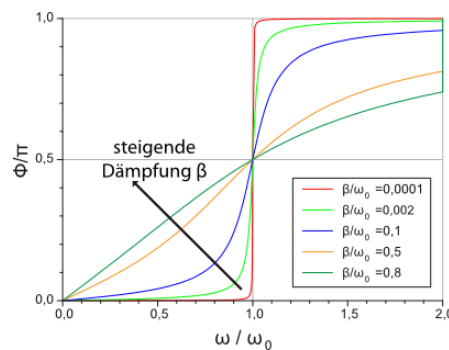


Abbildung 1: Phasenverschiebung einer erzwungenen Dämpfung [LP]

In Abbildung 1 sind für verschiedene Dämpfungen β die in Gleichung (10) berechneten Phasenverschiebungen gegen die Erregerfrequenz ω aufgetragen. Man erkennt, dass unabhängig von der Dämpfung eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ auftritt, wenn die Eigenfrequenz des Systems getroffen wurde.

3 Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

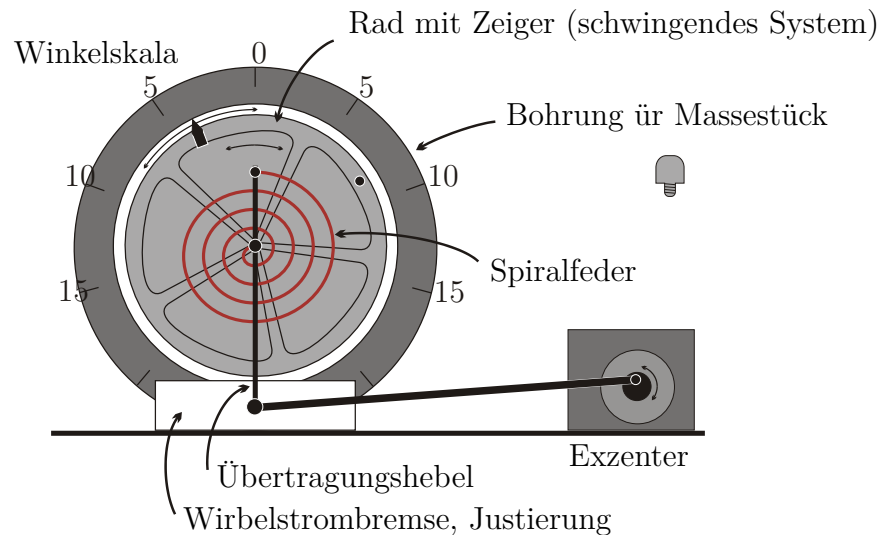


Abbildung 2: Skizze des Versuchsaufbaus [LP]

Der Pohlsche Resonator besteht aus einem drehbaren kupfernen Schwungrad, an dem eine Spiralfeder ein Rückstellmoment ausübt. Ein Ende der Feder ist zusätzlich mit einem Motor verbunden, so dass eine äußere Anregung induziert werden kann. Über eine Winkelskala kann die momentane Auslenkung des Rades abgelesen werden. Zusätzlich befindet sich am unteren Rand eine Justierung für die Wirbelstrombremse, welche millimetergenau an das Rad gebracht werden kann, um verschiedene Dämpfungen zu simulieren.

Die Auslenkung des Rades wird in gewissen Zeitabständen mit Hilfe eines Winkelkodierers an den Computer übertragen, so dass verschiedene Diagramme sofort betrachtet werden können.

3.2 Versuchsdurchführung

Der Versuch lässt sich in zwei große Blöcke unterteilen:

1. bei abgeschaltetem Exzenter werden für verschiedene Dämpfungen die Abklingkurven betrachtet;
2. für verschiedene Frequenzen ω des Motors werden für verschiedene Dämpfungen die Phasenverschiebungen und die maximalen Amplituden betrachtet.

Im ersten Block wird also die Erregerfrequenz ω auf 0 Hz gesetzt und die Wirbelstrombremse nacheinander auf 0 mm, 4 mm, 6 mm und 8 mm eingestellt. Die Drehscheibe wird manuell auf 120° gedreht und anschließend losgelassen.

Im zweiten Block wird die Wirbelstrombremse diesmal im Bereich von 4 mm bis 8 mm variiert und der Exzenter mit Frequenzen zwischen 100 mHz und 650 mHz betrieben.

4 Auswertung

4.1 Freie Schwingung

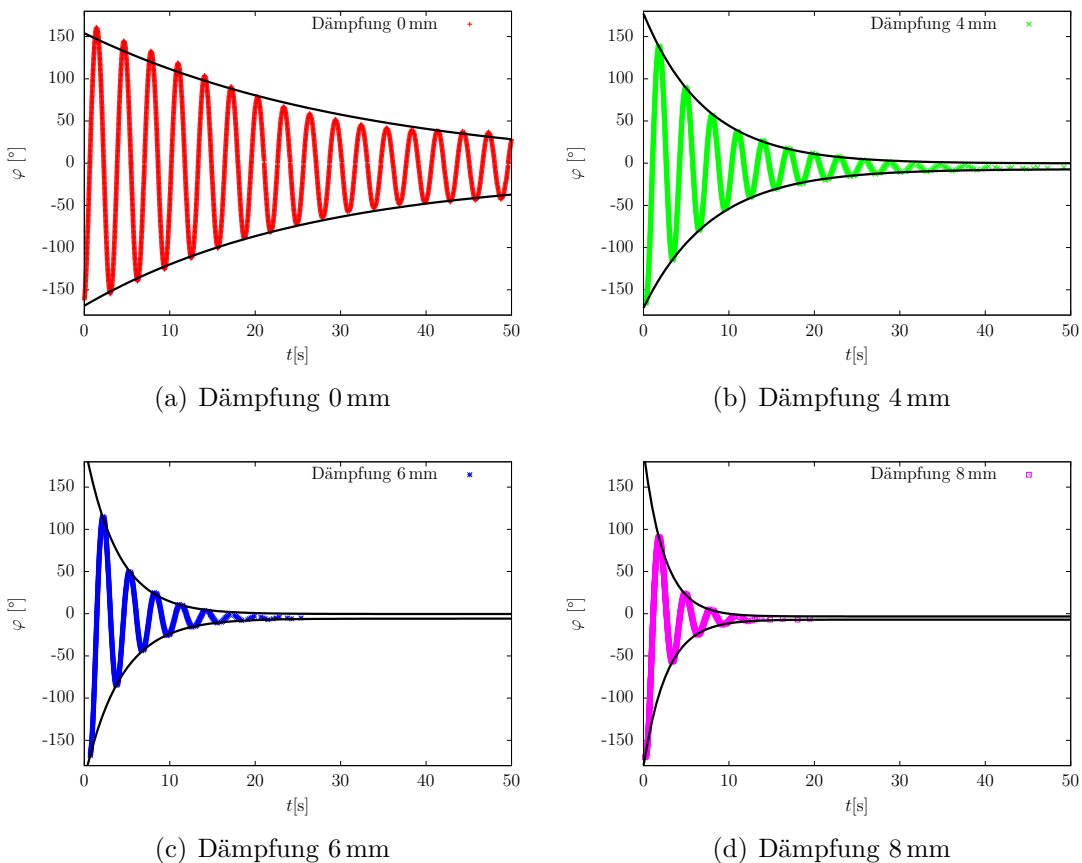


Abbildung 3: Auftragung der Messwerte für die freie Schwingung

Da die aufgenommenen Messdaten nicht um den Ursprung verlaufen, wurden die einzelnen Werte so verschoben (normiert), dass die Schwingung um die Abszisse verläuft.

In Abbildung 3 sind die verschiedenen Abklingkurven aufgetragen, welche wie erwartet bei stärkerer Dämpfung schneller abfallen. Anders als in der Theorie hergeleitet erkennt man jedoch nicht die vorhergesagte Erhöhung der Periodendauer T , sondern viel mehr einen kleinen Abfall. (vgl. auch Tabelle 1).

Um die Periodendauer der Schwingungen zu bestimmen, haben wir jeweils die zeitlichen Abstände der Maxima und Minima arithmetisch gemittelt und erhalten dann über $\omega_e = \frac{2\pi}{T}$ die Eigenfrequenz des Rads bei einer bestimmten Dämpfung.

Der Fehler bei der Bildung des arithmetischen Mittels beträgt

$$\Delta T_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_i - T_m)^2} \quad (16)$$

und pflanzt sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Eigenfrequenz über

$$\Delta \omega_e = \frac{\Delta T_m}{T_m} \omega_e \quad (17)$$

fort. Die damit erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Dämpfung	T_m in [ms]	ω_e in [Hz]
0 mm	3003 ± 12	$2,092 \pm 0,008$
4 mm	2980 ± 40	$2,108 \pm 0,029$
6 mm	2950 ± 30	$2,130 \pm 0,022$
8 mm	2950 ± 40	$2,130 \pm 0,029$

Tabelle 1: Auswertung der freien, gedämpften Schwingungen – Periodendauer und Eigenfrequenz

Nach Gleichung (8) berechnet sich das logarithmische Dekrement Λ über den Logarithmus des Verhältnisses aufeinanderfolgender Maxima oder Minima (arithmetisch über die Messdaten gemittelt). Der Fehler des Mittels berechnet sich analog zu:

$$\Delta \Lambda_m = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Lambda_i - \Lambda_m)^2} \quad (18)$$

Die Dämpfungskonstante β , welche hauptsächlich durch die Wirbelstrombremse charakterisiert wird, kann man über $\beta = \Lambda/T$ berechnen. Dabei ist der Fehler durch

$$\Delta \beta = \sqrt{\left(\frac{\Delta \Lambda}{T}\right)^2 + \left(\Delta T \frac{\Lambda}{T^2}\right)^2} \quad (19)$$

gegeben.

Außerdem lassen sich nun die Werte für die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0 über $\omega_0 = \sqrt{\omega_e^2 + \beta^2}$ berechnen. Hierbei ergibt sich der Fehler zu:

$$\Delta\omega_0 = \frac{\sqrt{\Delta\omega_e^2 \cdot \omega_e^2 + \Delta\beta^2 \cdot \beta^2}}{\omega_0}. \quad (20)$$

Die so errechneten Ergebnisse für alle Versuchsreihen sind in Tabelle 2 aufgeführt.

Dämpfung	Λ_m	β in [1/s]	ω_0 in [Hz]
0 mm	$0,062 \pm 0,007$	$0,021 \pm 0,003$	$2,095 \pm 0,008$
4 mm	$0,40 \pm 0,06$	$0,134 \pm 0,021$	$2,112 \pm 0,029$
6 mm	$0,68 \pm 0,04$	$0,231 \pm 0,014$	$2,142 \pm 0,022$
8 mm	$1,14 \pm 0,07$	$0,386 \pm 0,025$	$2,165 \pm 0,029$

Tabelle 2: Auswertung der freien, gedämpften Schwingungen – Dekrement, Dämpfungskonstante und ungedämpfte Eigenfrequenz

4.2 Erzwungene Schwingung

Für die Auswertung des zweiten Versuchsteils werden die Amplituden bei gegebener Erregerfrequenz bestimmt, indem die lokalen Maximal- und Minimalausschläge herausgefiltert und deren Betrag gemittelt wird. Die so erhaltenen Amplituden werden normiert mit $\varphi_0 = 17$, was etwa den Amplituden bei der geringsten Erregerfrequenz für alle Dämpfungen entspricht. Als Normierung für die Erregerfrequenz dient $\omega_0 = 2,13$ Hz, was sich aus der Mittelung der Werte in Tabelle 2 ergibt. In Abbildung 4 ist der dadurch berechnete Frequenzgang aufgetragen.

Nehmen wir also $\omega_0 = 2,13$ Hz an, so können wir die Resonanzfrequenzen auch über $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, wie in (15), berechnen. Dann erhalten wir in Tabelle 3 eine Gegenüberstellung der Daten.

Dämpfung	Praxis		Theorie	
	ω_r in [Hz]	ω_r/ω_0	ω_r in [Hz]	ω_r/ω_0
4 mm	$1,979 \pm 0,012$	$0,929 \pm 0,006$	$2,122 \pm 0,029$	$0,996 \pm 0,048$
6 mm	$2,07 \pm 0,02$	$0,972 \pm 0,009$	$2,105 \pm 0,023$	$0,988 \pm 0,053$
8 mm	$2,07 \pm 0,03$	$0,97 \pm 0,01$	$2,059 \pm 0,032$	$0,967 \pm 0,061$

Tabelle 3: Vergleich der erwarteten und gemessenen Resonanzfrequenzen

Außerdem ist die Phasenverschiebung der verschiedenen Durchgänge zu überprüfen. Gegeben ist der Zeitpunkt des Nulldurchgangs des Erregers. Über die eingestellte Erregerfrequenz lassen sich damit die Zeitpunkte der Ausschlagsmaxima des

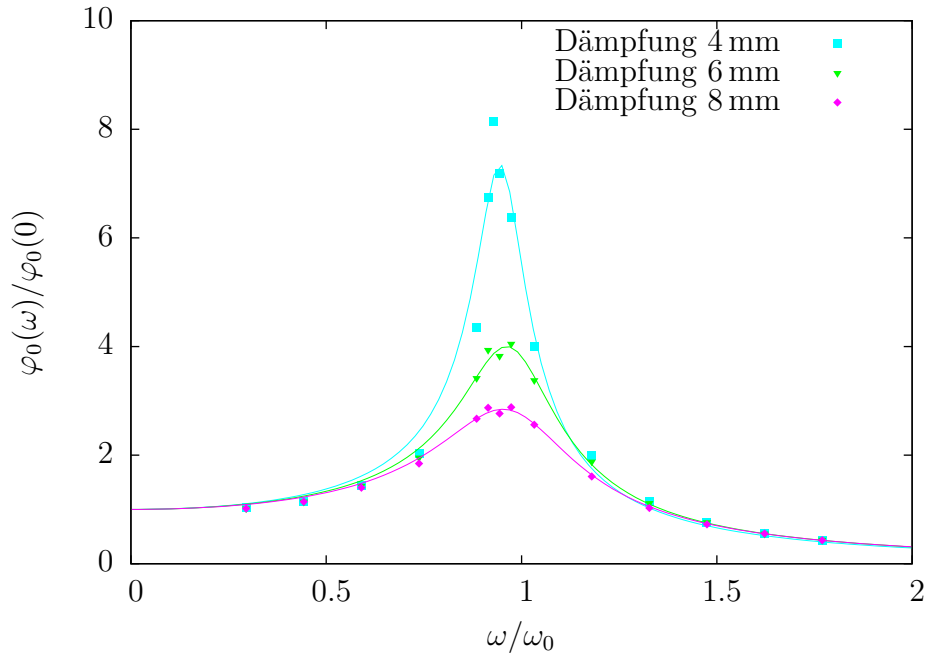


Abbildung 4: Frequenzgang für die verschiedenen Dämpfungen

Exzenters bestimmen. Bildet man die Differenz zwischen den gemessenen Maxima und den berechneten Maxima und mittelt diese Werte, erhält man die Zeitdifferenz Δt zwischen der erzwungenen Schwingung und der Erregerschwingung. Mittels

$$\phi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi f \cdot \Delta t \quad (21)$$

berechnet man daraus den Winkel der Phasenverschiebung. Die Ergebnisse für alle eingestellten Erregerfrequenzen bei den drei Dämpfungen ist in Abbildung 5 aufgetragen.

Der Winkel der Phasenverschiebung berechnet sich nach (10) zu

$$\phi = \arctan \left(\frac{2\beta \frac{\omega}{\omega_0}}{\omega_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)} \right). \quad (22)$$

Mittels `gnuplot` lassen sich aus den Messpunkten Werte für den Vorfaktor $\frac{2\beta}{\omega_0}$ fitten. Ebenso kann man den Vorfaktor mit den Messwerten aus der Messreihe 1 (vgl. Tabelle 2) bestimmen. Bei der theoretischen Berechnung ergibt sich der Fehler zu

$$\Delta \left(\frac{2\beta}{\omega_0} \right) = \sqrt{\Delta\beta^2 \frac{4}{\omega_0^2} + \Delta\omega_0^2 \frac{4\beta^2}{\omega_0^4}}, \quad (23)$$

der Fehler der Regression wird durch das Programm angegeben. Der Vergleich beider Ergebnisse ist in Tabelle 4 angegeben.

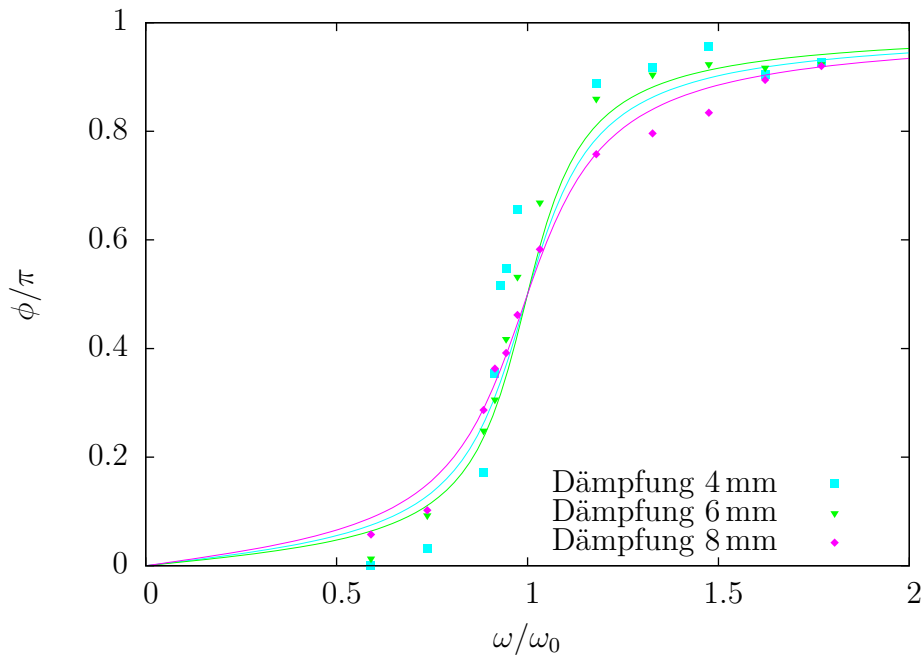


Abbildung 5: Phasenverschiebung für die verschiedenen Dämpfungen

	Praxis	Theorie	
Dämpfung	$2\beta/\omega_0$	$2\beta/\omega_0$	Abweichung
4 mm	$0,26 \pm 0,08$	$0,127 \pm 0,020$	104,7 %
6 mm	$0,23 \pm 0,04$	$0,216 \pm 0,014$	6,5 %
8 mm	$0,32 \pm 0,04$	$0,357 \pm 0,024$	10,4 %

Tabelle 4: Vergleich der erwarteten und gemessenen Phasenverschiebung

5 Diskussion

5.1 Messreihe 1

Bei der Auswertung ist besonders aufgefallen, dass in der ersten Versuchsreihe – also bei der gedämpften Schwingung ohne äußere Anregung – die Periodendauern sich entgegen der Vorhersagen aus der Theorie nicht erhöhen, sondern sogar ein wenig kleiner werden. Ein Versuch diese Abweichung zu erklären ist, dass die korrekten Eigenfrequenzen bei diesen Dämpfungen schon sehr nahe aneinander liegen und so durch Messungenauigkeiten dieser kleine Unterschied sich sogar scheinbar umkehrt. Die Messunsicherheiten würden sich durch systematische Fehler wie z. B. eine falsche Justierung der Wirbelstrombremse oder eine zu geringe Abtastrate der Winkel erklären lassen.

Des weiteren fällt auf, dass für eine Dämpfung von 0 mm die Eigenfrequenz ω_0 etwas höher ist als die gedämpfte Eigenfrequenz ω_e , was darauf zurückzuführen ist, dass β nicht nur von der Wirbelstrombremse abhängt, sondern auch die anderen Reibungsverluste beinhaltet.

5.2 Messreihe 2

Mit Abweichungen von bis zu 7% stimmen die experimentell ermittelten Resonanzfrequenzen gut mit den theoretisch erwarteten überein. Im Gegensatz zur Theorie verwundert aber, dass bei stärkerer Dämpfung die Resonanzfrequenz nicht kleiner wird, sondern im Gegenteil steigt. Dies lässt sich analog zum Ansteigen der Eigenfrequenzen in Abschnitt 5.1 erklären. Auffällig ist aber auch, dass bei Dämpfungen von 6 mm und 8 mm in der Nähe der Resonanzfrequenz lokale Minima im Frequenzgang vorliegen. Auch das lässt sich nur durch Messungenauigkeiten erklären.

Die Phasenverschiebung für die Dämpfung von 0 mm beträgt mehr als das Doppelte des theoretisch vorhergesagten Wertes. Diese starke Abweichung ergibt sich vor allem aus sehr von der Erwartung abweichenden Verschiebungen in der Nähe der Eigenfrequenz, die stark in die Regression eingehen. Dagegen sind die Ergebnisse für die anderen beiden Dämpfungen bei Abweichungen bis zu 11% zufriedenstellend.

6 Literaturverzeichnis

[LP] Lehrportal Physik. *Der Pohlsche Resonator* Online im Internet: <http://lp.uni-goettingen.de/get/text/3548>.